

CESAR-LCPC
Version recherche
Le module CVCR

CAHIER DE DÉVELOPPEMENT RÉALISÉ DANS LE CADRE DE L'OPÉRATION DE RECHERCHE 11P063

Juillet 2008

Auteur(s) : Viet-Tung NGUYEN (MSC)
Pierre HORNYCH (MSC)
Didier BODIN (MSC)
Jean- Michel PIAU
Denis SAINT-LAURENT

LCPC Etablissement Public national à caractère Scientifique et Technologique
Paris 58 boulevard Lefebvre - 75732 Paris cedex 15
Nantes Route de Bouaye - BP 4129 - 44341 Bouguenais cedex
Marne-la-Vallée LMSGC - Cité Descartes, Parc Club de la Haute Maison
2 allée Kepler - 77420 Champs-sur-Marne
Satory LIVIC - Batiment 140 - 13 route de la Minière - Satory - 78000 Versailles
Internet www.lcpc.fr

Résumé

Le module CVCR (**C**haussée **V**isco-élastique sous **C**harge **R**oulante) permet le calcul des déplacements, des déformations réversibles et des contraintes dans une chaussée multi-couche soumise à une charge roulante. Cette chaussée peut être constituée de matériaux à lois de comportement élastique linéaire isotrope, élastique non linéaire éventuellement orthotrope pour les matériaux non traités ou les sols (modèles proposés : Boyce modifié, k-θ) et visco-élastique linéaire isotrope pour les enrobés bitumineux (modèles proposés : Huet & Sayegh, Kelvin-Voigt et Burger). La présence d'un matériau visco-élastique (loi de comportement fonction du temps) entraîne la réalisation du calcul dans le repère de la charge roulante (détermination du régime pseudo-permanent) et oblige à respecter un certain nombre de règles pour la confection du maillage.

En la seule présence de matériaux élastiques linéaires ou non linéaires, l'utilisation du module CVCR revêt le caractère général de résolution d'un problème structurel élastique non linéaire, pour lequel la géométrie des structures modélisées, la nature du chargement , le maillage, etc…, peuvent être quelconques.

Les données relatives aux différents modèles de comportement proposés dans le module CVCR peuvent être obtenues à partir des essais de caractérisation classiques de laboratoire développés par le RST et les procédures d'identification idoines des paramètres (ex : essai triaxial à chargements répétés sur matériaux non liés pour l'identification des paramètres du modèle de Boyce ou du modèle $k-\theta$, essais de module complexe sur enrobés bitumineux à différentes fréquences et températures pour le modèle de Huet & Sayegh).

Des bases de données de ces paramètres sont également disponibles pour les matériaux routiers usuels (contacter la division MSC).

Le module CVCR a été validé sur le plan numérique et dans le domaine d'emploi viscoélastique par comparaison avec diverses solutions analytiques et semi-analytiques. Le comportement en élasticité linéaire et non linéaire a été validé à partir de la simulation d'un essai triaxial homogène.

Le module CVCR a par ailleurs été appliqué à divers cas opérationnels dans le cadre de travaux de recherche et d'expertise permettant d'illustrer ses principaux apports.

Entre autre, il permet :

- de mieux prendre en compte le comportement non linéaire des matériaux non liés et de tester (pour s'en affranchir éventuellement), les hypothèses utilisées habituellement en calcul de chaussées pour se ramener à la loi linéaire de Hooke (cf. technique du découpage d'une couche en sous-couches avec règle d'affectation de modules élastiques croissant de bas en haut) ;

- de mieux prendre en compte le caractère viscoélastique des enrobés bitumineux, quelle que soit la température des matériaux ou la vitesse de la charge roulante. L'utilisation de ce module a ainsi permis de retrouver dans le cadre de certains essais et par rapport aux simulations ALIZE une meilleure restitution des ordres de grandeur des déformations mesurées en bas de couche bitumineuse et un classement différent en amplitude des déformations longitudinale et transversale. Il permet aussi de mettre en évidence les contraintes de traction qui se créent en surface de chaussée derrière le passage d'une charge roulante.

Les principales applications de CVCR sont :

- la modélisation des chaussées routières à assises non traitées et bitumineuses, et notamment le traitement de conditions particulières de chargement (vitesse lentes, températures élevées..).
- la modélisation de chaussées aéronautiques ou spéciales telles que les plates-formes industrielles , où CVCR permet notamment une meilleure prise en compte des charges lourdes et vitesses de chargement lentes.
- Le calcul des champs de déformation réversible et champs de contrainte pour une exploitation par le module ORNI de CESAR-LCPC dont l'objet concerne la prévision des risques d'orniérage des couches non liées ou bitumineuses des chaussées.

Historique des modifications

Date	Auteur(s)	Objet de la modification
13/02/2006	DPr/MN	Embryon de version initiale faisant suite à la réunion technique de ce jour.
8/01/08	Division MSC	Ajout de parties concernant : La description de la programmation, les exemples et jeux de données de validation.

CESAR-LCPC
version Recherche

CAHIER DE DÉVELOPPEMENT

Le module de calcul CVCR

SOMMAIRE

1. EXPRESSION DES BESOINS 5

2. CAHIER DES CHARGES 6

3. ÉLÉMENTS DE SPÉCIFICATIONS 6

3.1 Caractéristiques techniques 7
3.2 Limitations 8

4. ÉLÉMENTS DE CONCEPTION 9

4.1 Aspects théoriques 9
4.1.1 Lois de comportement 9
4.1.2 Prise en compte d'états de contraintes initiaux dans les lois de comportement élastiques non linéaires 12
4.1.3 Prise en compte d'une pression de cohésion dans les modèles élastiques non linéaires 14
4.1.4 Formulation du problème (cas du calcul de chaussée sous charge roulante) 15
4.1.5 Méthode de résolution 16
4.1.6 Interprétation des résultats de CVCR en termes de module et coefficient de Poisson sécants 18
4.2 Aspects programmation 20

5. RÉALISATION 21

5.1 Éléments pour le Manuel de programmation 21
5.1.1 Listes des routines modifiées 21
5.1.2 Listes des routines nouvelles 21
5.2 Éléments pour le Manuel d'utilisation 23
5.2.1 Explications générales 23
5.2.2 Description des données 23
5.2.3 Exemple(s) de mise en œuvre commenté(s) 29

6. TEST DE LA FONCTIONNALITÉ 32

6.1 Plan de tests 32
6.2 Fiches de test 33

7. VALIDATION DE LA FONCTIONNALITÉ 81

7.1 Développements futurs envisagés 81

8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 82

1. EXPRESSION DES BESOINS

Ce cahier de développement reprend la description du module CVCR, développé initialement dans le cadre du travail de thèse de J.V Heck [1,2] et complété par l'ajout de modèles de comportement élastiques non linéaires pour les graves non traitées par Hornych et al. [3].

L'objectif initial du travail était d'implanter dans un code de calcul par éléments finis le modèle visco-élastique de Huet-Sayegh [4], [5], qui permet une description très réaliste du comportement des enrobés bitumineux, et qui a été largement validé sur des résultats d'essais de module complexe en laboratoire. L'objectif était de permettre une description plus réaliste du comportement des couches de chaussées bitumineuses qu'avec la méthode courante de dimensionnement, basée sur un modèle élastique linéaire multi-couche. La sensibilité du comportement des couches bitumineuses à la température, à la vitesse de sollicitation, et la dissymétrie des signaux de mesure des déformations sous passage d'une charge, traduisant un comportement visco-élastique sont clairement mis en évidence dans les expériences en vraie grandeur sur chaussées instrumentées, ou sur le manège de fatigue du LCPC. La prise en compte de ces effets visco-élastique est d'autant plus nécessaire que les températures sont élevées et les vitesses de chargement lentes. La visco-élasticité permet également de rendre compte d'observations qui ne peuvent pas être retrouvées dans des calculs élastiques linéaires, tels que le classement relatif entre les déformations de traction longitudinales et transversales à la base des couches bitumineuses, ou l'apparition de contraintes de traction en surface des chaussées, derrière la charge.

Deux autres modèles visco-élastiques ont également été implantés dans CVCR : le modèle de Burger et le modèle de Kelvin-Voigt [6]. Il s'agit de modèles simples, sans dépendance thermique, qui ont été utilisés notamment à des fins de comparaison et de validation par rapport à d'autres logiciels de calcul en visco-élasticité. Il est à noter que tous les modèles visco-élastiques considèrent un coefficient de Poisson constant.

Parallèlement, les recherches menées en laboratoire sur le comportement des graves non traitées (GNT), au moyen d'essais triaxiaux cycliques ont montré que pour un cycle de chargement, le comportement de ces matériaux est assez bien décrit à l'aide de modèles élastiques non linéaires. Ces recherches ont conduit à choisir le modèle élastique non linéaire de Boyce [7] pour la description du comportement des GNT. Ce modèle a ensuite été amélioré en prenant en compte l'anisotropie mise en évidence dans les essais triaxiaux [3]. Ce modèle a été implanté dans CVCR pour les applications de modélisation des chaussées à faible trafic, à assises non traitées, et pour permettre également un couplage entre comportement visco-élastique des couches bitumineuses et comportement non linéaire des couches de GNT. Un second modèle élastique non linéaire utilisé pour les GNT et les sols granulaires, le modèle k-theta [8], moins réaliste mais largement utilisé pour les chaussées, a également été ajouté.

2. CAHIER DES CHARGES

Les objectifs qui ont été fixés pour le module CVCR sont les suivants :

- Réalisation d'un module dédié aux calculs de structures de chaussées avec des modèles visco-élastiques et élastiques non linéaires.
- Prise en compte des modèles suivants : Huet & Sayegh, Burger, Kelvin Voigt, Boyce modifié, K-theta.
- Réalisation de calculs en 3D, sous charge roulante (à vitesse constante), en effectuant le calcul dans le repère de charge roulante.
- En présence de matériaux visco-élastiques, la géométrie de la chaussée est limitée à un parallélépipède, constitué de plusieurs couches suivant la direction verticale z. Propriétés de la chaussée invariantes suivant la direction x de déplacement de la charge. (Ces contraintes d'emploi disparaissent en l'absence de matériaux à rhéologie viscoélastique).
- Réalisation de calculs avec une charge fixe en 2D (axisymétriques et en déformations planes) et en 3D avec les modèles élastiques non linéaires.
- Calcul des résultats en contraintes, déformations et déplacements.
- Calculs des chemins de contraintes obtenus lors du déplacement de la charge roulante, pour utilisation dans le module ORNI, pour la modélisation de l'orniérage.

3. ÉLÉMENTS DE SPÉCIFICATIONS

Le module CVCR dédié aux calculs de chaussées intègre des lois de comportement spécifiques aux matériaux routiers. Le comportement des matériaux non liés (graves non traitées) y est modélisé en élasticité non linéaire (modèle de Boyce, ou modèle k-theta). Les calculs peuvent être effectués sous les hypothèses 2D axisymétriques, 2D déformations planes et 3D.
Le calcul viscoélastique dans le repère de la charge se déplaçant à vitesse constante s'effectue en 3D et serait dépourvu de sens en 2D. Dans le cas 3D, le couplage entre le comportement viscoélastique et non-linéaire des assises est pris en compte.

Ainsi les différentes spécifications (SP i) du module CVCR sont déclinées comme suit :

Spécification	Hypothèses de calcul	Comportement
SP01	2D déformation plane	Elastique non linéaire (Boyce)
SP02	2D Axisymétrique	Elastique non linéaire (Boyce)
SP03	3D	Elastique non linéaire (Boyce)
SP04	2D déformation plane	Elastique non linéaire (k-theta)
SP05	2D Axisymétrique	Elastique non linéaire (k-theta)
SP06	3D	Elastique non linéaire (k-theta)
SP07	3D	Viscoélastique
SP08	3D	Multicouche viscoélastique + élastique non linéaire (Boyce)

3.1 Caractéristiques techniques

Ce module peut remplir deux fonctions :

1) le calcul de section courante de chaussées bitumineuses sous charge roulante, prenant en compte le caractère (thermo-) visco-élastique des couches d'enrobés bitumineux, en combinaison éventuellement avec le comportement élastique non linéaire des couches de matériaux non traités.

2) le calcul en élasticité non-linéaire de toute structure (quelle que soit sa géométrie) constituée de matériaux répondant aux lois de comportement suivantes :
   a. élasticité linéaire isotrope ou anisotrope ;
   b. modèle de Boyce isotrope ou anisotrope ;
   c. modèle $k-\theta$ isotrope.

Caractéristiques pour le calcul de chaussées visco-élastiques :

Maillage :

Pour ce type de calcul, le maillage peut être 2D ou 3D, mais doit présenter une autosimilarité suivant l'axe x de circulation des charges. Un tel maillage peut notamment être obtenu par génération d'un maillage linéique suivant l'axe y en 2D, ou surfacique dans le plan (y,z) en 3D, puis translation suivant x . Les intervalles suivant x peuvent être pris variables, pour affiner notamment le maillage au droit des charges.

L'ensemble des éléments de massifs, poutres, coques, 2D et 3D conviennent, mais les lois de comportement visco-élastiques ou élastiques non linéaires ne sont prises en compte que dans les éléments de massif.

Lois de comportement utilisables : modèles visco-élastiques et modèles élastiques non linéaires décrits dans cette notice, élasticité linéaire.

Chargements :

Ceux-ci se composent :

- des charges roulantes en surface de chaussée , modélisées par exemple à partir de pression spécifiées sur quelques facettes d'éléments (ex : utilisation du mot-clé PUR) ;
- éventuellement, du poids propre des couches de chaussée (utilisation du mot-clé POI) et des contraintes initiales associées (utilisation du mot-clé SIG, avec ICAL=0).

Nota : Pour ce module et pour les groupes de matériaux à élasticité non linéaire et malgré la valeur ICAL=0, les contraintes initiales sont prises en chargement à travers le traitement de la loi de comportement. Elles doivent donc être équilibrées par la mise en chargement également des efforts extérieurs qui leur sont associés (ex : poids propre associé aux contraintes géostatiques)

Méthode de résolution utilisée dans tous les cas :

Algorithme itératif de Newton-Raphson avec :

- En phase initiale : assemblage, factorisation de la matrice d'élasticité linéaire associée aux modules « forfaitaires » donnés par l'utilisateur.

- A l ‘intérieur de chaque itération : calcul du résidu = différence entre la puissance des efforts extérieurs et la puissance des efforts intérieurs ; le calcul de cette dernière est basé sur le calcul des contraintes découlant des lois de comportement considérées et des déformations obtenues à l'itération précédant celle en cours.

Post-traitement

Le fichier de résultats de CVCR comprend 2 incréments de chargement. Le premier stocke les déplacements et les contraintes, le second les déplacements et les déformations réversibles. L'exploitation par PEGGY 2D ou 3D du module CVCR permet donc de visualiser les déplacements, les contraintes et les déformations réversibles. Pour obtenir ces dernières, on demandera par convention à exploiter le cas de charge N°2.

3.2 Limitations

Ce module est utilisable avec les familles d'éléments isoparamétriques bidimensionnels de type déplacement (famille 1), isoparamétriques tridimensionnels de type déplacement (famille 2), de relations linéaires (famille 9) et spéciaux de rigidité (famille 10).

Pour les calculs visco-élastiques, La seule géométrie autorisée est un bloc rectiligne de chaussées où les couches de matériaux sont parallèlement disposées à la direction de passage de la charge (direction x obligatoirement).

Les seules conditions aux limites en déplacement applicables en présence des matériaux viscoélastiques dans ce module sont de type déplacement nul. Celles-ci ne doivent pas être modifiées en cas de reprise du calcul. En l'absence de matériau visco-élastique, aucun impératif de conditions limites n'est à respecter.

Les calculs 2D permettent la résolution de problèmes en déformations planes ou de problèmes axisymétriques. Etant bien entendu que le traitement d'un problème axisymétrique pour une chaussée contenant un matériau visco-élastique n'a pas de sens.

Pour les calculs de chaussée, il est préconisé d'utiliser la condition limite en déplacement $u = 0$ sur les faces verticales aux extrémités en x du maillage. L'utilisateur veillera à donner en conséquence une extension suffisante en x au maillage, afin d'approximer correctement les autres conditions à l'infini $(v = w = 0, \sigma._{xx} = \sigma._{xy} = \sigma._{xz} = 0)$.

Les modèles élastiques non linéaires utilisés pour les GNT et les sols sont construits, conformément à la physique des matériaux granulaires non liés, pour fonctionner essentiellement dans le domaine des états de contrainte en « compression », associés en l'occurrence au domaine des pressions moyennes positives.
Les lois de comportement introduites dans CVCR permettent toutefois de tenir compte d'un état de contrainte initial (associé par exemple au poids des matériaux) et/ou d'une pression de cohésion, apportée par la présence d'eau porale. Le fonctionnement des modèles peut alors s'étendre au domaine des pressions moyennes « faiblement » négatives, correspondant à des états de traction de faible intensité. Ceci permet entre autre de fournir une solution au calcul des chaussées non revêtues pour lesquelles l'état de contrainte en surface, en dehors du domaine d'application des charges de trafic, est nul.

Remarque :
Le post-traitement de CVCR en présence de matériaux visco-élastiques (IMOD=102) ne fonctionne pas actuellement dans CLEO.

4. ÉLÉMENTS DE CONCEPTION

.

4.1 Aspects théoriques

La formulation du problème aux limites associé au calcul des chaussées sous charges roulantes repose sur l'hypothèse d'une géométrie, des propriétés de la chaussée et de sollicitation uniforme dans la direction de passage de la charge. L'absence de points singuliers dans la chaussée et la vitesse constante de la charge engendrent l'existence d'un régime pseudo-permanent qui permet d'étudier le problème dans le repère de la charge roulante. La dépendance au temps de la loi de comportement viscoélastique disparaît alors pour donner lieu à une relation non locale entre contraintes et déformations. Ci dessous, les lois de comportement réversible des matériaux de chaussées sont présentées. La formulation du problème en présence de matériau thermo-viscoélastique respectant la loi de comportement de Huet-Sayegh est ensuite décrite en détail.

4.1.1 Lois de comportement

La version actuelle de CVCR permet de prendre en compte des lois de comportement réversible suivantes pour les matériaux de chaussées :

- le sol est modélisé en utilisant un comportement élastique linéaire ;
- les graves non traités sont modélisées en utilisant les modèles élastiques non linéaires de Boyce [3, 7] et k-θ [8] ;
- les matériaux bitumineux sont modélisés en utilisant les modèles de comportement viscoélastiques de Huet-Sayegh [4, 5], Burger ou Kelvin-Voigt [6].

Ces modèles de comportement sont décrits ci-dessous avec les conventions usuelles de la Mécanique des Milieux Continus (traction, extension >0, compression, contraction <0) :

Loi élastique linéaire

Le modèle analogique est de type « ressort simple ».

- Loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\underline{\underline{1}} \qquad \textit{avec } \lambda \textit{ et } \mu \textit{ coefficients de Lamé} \qquad (1)$$

Loi élastique non linéaire

Ces lois peuvent être éventuellement orthotropes (direction d'anisotropie = axe vertical).

- Modèle de Boyce modifié :

Pour déterminer cette loi, on utilise le potentiel de Boyce modifié par l'introduction du paramètre d'anisotropie γ , soit :

$$W = \frac{p^{*n+1}}{p_a^{\,n-1}}\left[\frac{1}{(n+1)K_a} + \frac{1}{6\,G_a}\left(\frac{q^*}{p^*}\right)^2\right] \qquad (2)$$

avec :

$$p^* = -\frac{Tr(\underline{\underline{\sigma}}^*)}{3} \quad \text{où : } \underline{\underline{\sigma}}^* = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \gamma\sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$$

$$q^* = \sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{s}}^{*2}\right)}$$

avec : $\underline{\underline{s}}^* =$ *tenseur déviateur de* $\underline{\underline{\sigma}}^*$,

p_a *= pression atmosphérique,*

K_a, G_a *paramètres du modèle,*

n *= exposant compris entre 0 et 1,*

γ *= paramètre d'anisotropie selon l'axe ZZ.*

Comme le montre cette expression, cette loi n'est valable que dans le domaine $p^* > 0$ correspondant physiquement aux états de contrainte de compression.

Pour γ =1, on retrouve le potentiel élastique isotrope de Boyce classique.

Par dérivation du potentiel (2), la loi élastique non linéaire anisotrope s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = 2\,G^*\left(p^*\right)\underline{\underline{e}}^* + K^*\left(p^*,q^*\right)\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^*\right)\underline{\underline{1}} \quad \text{ou en notation symbolique} \quad \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \qquad (3)$$

avec *:* $\underline{\underline{\varepsilon}}^* = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \frac{\varepsilon_{zz}}{\gamma}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$ *;*

$\underline{\underline{e}}^*$ *= tenseur déviateur de* $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ *;*

$$G^*\left(p^*\right) = G_a\left(\frac{p^*}{p_a}\right)^{1-n}$$

$$K^*\left(p^*,q^*\right) = K_a\,\frac{\left(\frac{p^*}{p_a}\right)^{1-n}}{1-\beta\left(\frac{q^*}{p^*}\right)^2} \qquad \text{où } \beta = (1-n)\frac{K_a}{6\,G_a}$$

L'identification des paramètres de ce modèle est effectuée dans le RST à partir des essais triaxiaux à chargements répétés.

- Modèle k-θ :

La loi est caractérisée par un coefficient de Poisson constant et un module élastique, fonction de la contrainte moyenne p (de signe >0 en compression suivant la convention de la Mécanique des sols), donné par :

$$E(p) = E^0\left(\frac{p}{p_a}\right)^{1-N} \qquad (4)$$

avec : p_a *= pression atmosphérique,*

E° : Module d'Young pour $p = p_a$,

N : exposant compris entre 0 et 1.

Nota : ce modèle s'écrit parfois sous la forme :

$$E(p) = K\theta^{\alpha} \qquad (5)$$

avec : $\theta = 3p$,

K, α : paramètres du modèle. Par correspondance avec la relation (4), α = 1-N

d'où son nom.

Remarque : Dans la version actuelle du solveur CESAR, le modèle s'introduit à partir des données du modèle de Boyce (IMOD=83), en donnant la valeur 1000 au coefficient Gamma, qui joue le rôle de code d'identification du modèle k-θ.

Lois (thermo)viscoélastiques linéaires

Ces lois sont caractéristiques des modèles de Huet & Sayegh, de Kelvin-Voigt ou de Burger.

Considérant un matériau isotrope à coefficient de Poisson ν réel constant, elles peuvent s'exprimer sous forme tensorialisée par l'équation : :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t,\theta) = \int_{-\infty}^{t} F\,(t-t',\theta)\left[(1+\upsilon)\,\underline{\underline{\sigma}}(t') - \upsilon\, tr\left(\underline{\underline{\sigma}}(t')\right)\underline{\underline{1}}\right]_{,t}\, dt' \qquad (6)$$

où $F(t)$ est la fonction de fluage du matériau à la température θ.

En annexe à cette note, on trouvera l'extrait de la thèse de Heck [1] qui décrit les procédures de calcul pas à pas utilisées pour passer de la fonction $t \rightarrow \sigma(t)$ à la valeur de $\varepsilon(t)$ ou inversement de la fonction $t \rightarrow \varepsilon(t)$ à la valeur de $\sigma(t)$. Ce dernier algorithme est notamment repris dans la résolution du problème par la méthode des éléments finis, pour le calcul du vecteur de forces nodales internes $F_i(U)$ associé au vecteur de déplacement nodal U , supposé connu (voir plus loin).

- *<u>Modèle de Huet & Sayegh</u> (modèle solide) :*

Ce modèle est constitué de deux branches parallèles dont l'une possède un ressort et deux amortisseurs paraboliques et l'autre un ressort correspondant au comportement statique ou à long terme de l'enrobé.

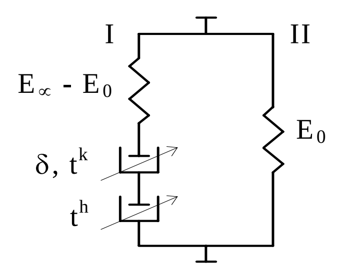


Figure 1: Représentation analogique du modèle de Huet-Sayegh

Il n'existe pas d'expression analytique de la fonction de fluage de ce modèle. A défaut, on utilise la fonction de fluage de la branche I du modèle moyennant une adaptation de la loi de comportement (6) qui devient :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}(t,\theta) = \int_{-\infty}^{X} F^{I}(t-t',\theta)\left[(1+\upsilon)\underline{\underline{\sigma}}^{I}(t') - \upsilon\, tr\left(\underline{\underline{\sigma}}^{I}(t')\right)\underline{\underline{1}}\right]_{,t}(t')dt' \\ \underline{\underline{\sigma}}(t,\theta) = \underline{\underline{\sigma}}^{I}(t,\theta) + 2\mu_0\underline{\underline{\varepsilon}}(t,\theta) + \lambda_0\, tr(\underline{\underline{\varepsilon}}(t,\theta))\underline{\underline{1}} \end{cases} \qquad (7)$$

où pour $t > 0$: $$F^{I}(t,\theta) = \frac{1}{E_{\infty} - E_{0}} \left(1 + \delta \frac{(t/\tau(\theta))^{k}}{\Gamma(k+1)} + \frac{(t/\tau(\theta))^{h}}{\Gamma(h+1)} \right) \quad (8)$$

avec : E_{∞} *: module élastique instantané (correspondant à la limite du module complexe lorsque la fréquence tend vers l'infini)*

E_0 *: module élastique statique (correspondant à la limite du module complexe lorsque la fréquence tend vers 0),*

k, h : exposants des amortisseurs paraboliques tels que 1 > h > k > 0,

δ *: coefficient adimensionnel >0,*

Γ *: fonction d'Euler de deuxième espèce,*

τ *: fonction décroissante de la température qui rend compte du principe d'équivalence temps / température. Elle est classiquement approchée par les lois d'Arrhénius ou d'Eyring. Elle est approximée dans le module CVCR par la fonction exponentielle suivante, suffisante pour décrire la gamme des températures rencontrées en condition de service :*

$$\tau(\theta) = \exp(A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2) \quad (9)$$

L'identification des paramètres de ce modèle est effectuée dans le RST à partir des essais de module complexe. Un logiciel, intitulé Visco-analyse a été développé pour la détermination de ces paramètres. Son principe est décrit dans les référence [9, 10].

- Modèle de Kelvin-Voigt (modèle solide) :

L'expression analytique de la fonction de fluage de ce modèle classique est donnée pour $t > 0$ par :

$$F(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \quad (10)$$

avec : *E : module élastique du ressort,*

η *: viscosité de l'amortisseur.*

- Modèle de Burger (modèle liquide) :

L'expression analytique de la fonction de fluage du modèle est :

$$F(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2}(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t}) \quad (11)$$

avec : E_1*: module élastique du ressort de la partie Maxwell,*

η_1*: viscosité de l'amortisseur de la partie Maxwell,*

E_2*: module élastique du ressort de la partie Kelvin-Voigt,*

η_2*: viscosité de l'amortisseur de la partie Kelvin-Voigt.*

4.1.2 Prise en compte d'états de contraintes initiaux dans les lois de comportement élastiques non linéaires

Le module CVCR permet de prendre en compte la présence de contraintes initiales $\underline{\underline{\sigma}}^0$ dans les groupes élastiques à comportement linéaire ou non linéaire (la relaxation des contraintes dans les matériaux bitumineux visco-élastiques fait que l'introduction de contraintes initiales dans celui-ci présente moins d'intérêt). L'introduction de ces contraintes implique certaines précautions dans la création du jeu de données (voir ci-dessous) ; l'indicateur ICAL du mot-clé SIG doit être fixé d'une part à la valeur 0 , afin de ne pas associer de chargement aux contraintes initiales ; le jeu de données

doit intégrer d'autre part l'ensemble des chargements extérieurs responsables des contraintes initiales, tels que le poids propre des matériaux). On pourra se référer utilement aux jeux de données fournis en exemple.

L'introduction de $\underline{\underline{\sigma}}^0$ dans les lois élastiques permet de prendre en compte les états de contraintes initiaux pouvant être générés par le poids propre des matériaux, par le compactage lors de leur mise en place ou encore par les chargements répétés ayant conduit à des comportements non réversibles (orniérage). Ces contraintes initiales peuvent venir compenser l'apparition, d'états de contraintes de traction engendrés par les sollicitations extérieures, et qui seuls, seraient non admissibles pour les matériaux non liés.

La prise en compte des contraintes initiales entraîne la modification des lois de comportement élastiques (1) et (3). On prend pour convention que l'état de déformation initial correspondant à l'état de contraintes initial est l'état de référence, c'est à dire : $\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \underline{\underline{0}}$. Ce choix entraîne les nouvelles lois de comportement élastiques :

(1) $\Rightarrow$ $$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\underline{\underline{1}} \quad (12)$$

(3) $\Rightarrow$ $$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} : \left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^0\right)\right] \quad (13)$$

L'algorithme de résolution utilisé dans le module CVCR est itératif et basé, comme indiqué plus loin, sur le calcul du résidu correspondant à la différence $\hat{P}_e - \hat{P}_i$ entre les puissances des efforts externes et internes s'appliquant sur la structure (appel au sous programme ASSEMF). Le «chargement » lié aux contraintes initiales est alors naturellement pris en compte en cours de résolution , lors du calcul de la quantité :

$$\hat{P}_i = \int_\Omega \sigma : \hat{\varepsilon}\, d\Omega$$

réalisé à partir des expressions (12) ou (13) de σ .

Pour les groupes élastiques linéaires, le calcul de σ correspondant à l'équation (12) est effectué dans le sous-programme ELLINE.

Pour les groupes élastiques non linéaires, la relation (13) est traitée dans le sous-programme ENLBOY. σ^0 est d'abord transformé en tout point d'intégration, en tenseur de déformation $\varepsilon^0 = B^{-1}(\sigma^0)$, à partir des expressions analytiques de B et B^{-1}; ε^0 est alors ajouté à la déformation ε, pour calculer à partir de B, le tenseur de contrainte : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} : \left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^0\right]$.

Compte tenu de ce mode de résolution, l'utilisation du module CVCR implique de limiter dans le module CHAR la prise en compte des contraintes initiales à la simple opération d'initialisation, sans mise en chargement (option ICAL=0). Il convient en revanche d'intégrer dans le jeu de données l'ensemble des chargements extérieurs générateurs de contraintes initiales, tels que le poids propre des matériaux, pour leur prise en compte dans le calcul de la puissance des efforts extérieurs $\hat{P}_e$.

La première itération de CVCR se fait par ailleurs avec un appel au sous-programme ASSEMF, qui appliqué à l'état de contrainte σ^0 et ajouté algébriquement au vecteur de forces extérieures, annule,

pour un jeu de données cohérent[1], l'effet mécanique de σ^0. La première itération ne prend ainsi en compte que les chargements créant une situation de déséquilibre (ex : charges roulantes), conduisant à des champs de déformations et de contraintes plus proches de la solution à atteindre.

4.1.3 Prise en compte d'une pression de cohésion dans les modèles élastiques non linéaires

Le module CVCR permet de prendre en compte la présence d'une pression de cohésion dans les modèles élastiques non linéaires de Boyce (isotrope ou anisotrope) ou de type $k-\theta$. Celle-ci peut être concomitante ou non à la présence d'un état de contraintes initiales $\underline{\underline{\sigma}}^0$. Cette pression de cohésion peut être liée à la succion, due à l'état non saturé de la Grave non traitée

En notant comme précédemment $\sigma = B(\varepsilon)$ la loi élastique non linéaire considérée au départ, la loi de comportement en présence d'une pression de cohésion et d'un état de contrainte initial σ^0 éventuel s'écrit :

$$\sigma = B\left[\varepsilon + B^{-1}(\sigma^\circ - p^c I)\right] + p^c I \qquad (14)$$

avec : p^c = *pression de cohésion, considérée positive par convention (* p^c *= réel positif ou nul)*
I = *tenseur unité 3x3.*

La relation précédente s'obtient en retranchant les déformations ε_1 et ε_2 :

- liées d'une part à l'état de contrainte σ et à la pression de cohésion p^c, soit : $\varepsilon_1 = B^{-1}(\sigma - p^c I)$
- liées d'autre part à l'état de contrainte initial σ° et à la pression de cohésion p^c, soit : $\varepsilon_2 = B^{-1}(\sigma^\circ - p^c I)$
- et en calculant la déformation résultante : $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = B^{-1}(\sigma - p^c I) - B^{-1}(\sigma^0 - p^c I)$

L'expression de la puissance des efforts intérieurs $\hat{P}i = \int_{Maillage\ \Omega} \sigma : \hat{\varepsilon}\, d\Omega$ conduit alors à considérer dans le calcul du résidu, le terme :

$$\int_\Omega \left\{B\left[\varepsilon + B^{-1}(\sigma^\circ - p^c I)\right] + p^c I\right\} : \hat{\varepsilon}\, d\Omega \qquad (15)$$

Ainsi l'introduction d'une pression de cohésion dans le code source du module CVCR se traduit par :

i) l'ajout de la lecture de la pression de cohésion dans les données du modèle de Boyce ou du modèle $k-\theta$ des familles d'éléments 01 et 02

ii) l'ajout dans EXCVCR du terme $-p^c I$ au champ de contrainte initial σ°

iii) l'ajout du terme $p^c I$ dans les relations entre tenseur de contraintes et tenseur de déformation des modèles de Boyce et $k-\theta$.

---

[1] Jeu de données pour lequel σ^0 est en équilibre avec la donnée des forces extérieures contribuant à son existence

La somme $\sigma^\circ - p^c I$ (opération *ii*) est formée dans le sous-programme EXCVCR avant la boucle d'itérations, par un appel au sous-programme AIGUIL, en imposant l'argument ITERA à la valeur nulle.

Ceci permet de calculer les termes $\int_\Omega \left(\sigma^\circ - p^c I\right) : \hat{\varepsilon}\, d\Omega$ et $\int_\Omega B\left[\varepsilon + B^{-1}(\sigma^\circ - p^c I)\right] : \hat{\varepsilon}\, d\Omega$ par les mêmes procédures que celles utilisées en l'absence de pression de cohésion.

L'opération *iii* est quant à elle traitée dans la routine ENLBOY.

4.1.4 Formulation du problème (cas du calcul de chaussée sous charge roulante)

On considère dans la suite une section courante de chaussée, constituée d'une part de couches de matériaux à comportement élastique linéaire ou non (sol, matériaux granulaires liés ou non liés,…) et d'autre part de couches de matériaux bitumineux à comportement viscoélastique linéaire, répondant au modèle de Huet-Sayegh [4,5] ou aux autres modèles de viscoélasticité disponibles dans CVCR. Il est à noter qu'une couche homogène de matériau bitumineux peut au besoin être subdivisée en sous-couches (associées à des groupes d'éléments distincts) afin de tenir compte de profils de température variables avec la profondeur ; chaque sous-souche peut alors être affectée de sa propre valeur de température « moyenne ».

On s'intéresse au calcul mécanique réversible de cette chaussée en petites déformations sous l'effet d'une charge roulante se déplaçant à vitesse constante V, parallèlement à l'axe Ox et en sens contraire de celui-ci (axe éventuellement incliné dans le cas d'une pente).

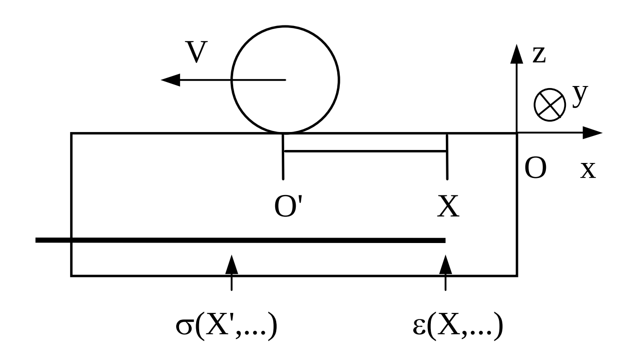


Figure 2: Schéma de principe du modèle de chaussée viscoélastique sous charge roulante (la roue n'est représentée que par les efforts de verticaux et éventuellement horizontaux qu'elle apporte en surface du maillage)

Dans un repère fixe lié à la route, les champs mécaniques (déplacements, déformations, contraintes…) dépendent des variables spatiales x, y, z et du temps t. Toutefois, lorsque la charge roule depuis suffisamment longtemps à vitesse constante, il s'instaure un régime pseudo-permanent pour lequel ces quantités ne dépendent plus que des variables $X = x + Vt$ (, y et z. On est ainsi invité à résoudre un problème mécanique stationnaire, dans le repère de la charge roulante $R' = (O', X, y, z)$, pour lequel les équations d'équilibre et les équations cinématiques usuelles (relations entre les déplacements et le tenseur de petite déformation) restent valides.

Sur le plan des lois de comportement, cette méthode de résolution laisse inchangées les lois indépendantes du temps, telles qu'en particulier les lois élastiques linéaires ou non. Les lois

(thermo)viscoélastiques linéaires se transforment quant à elles en une convolution spatiale de la variable X (à température fixée pour z donné). Ainsi l'équation (6) devient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(X, y, z, \theta(z)) = \int_{-\infty}^{X} F\left(\frac{X - X'}{V}, \theta(z)\right) \left[(1+\upsilon)\underline{\underline{\sigma}} - \upsilon \, tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}\right]_{,X}(X', y, z, \theta(z)) \, dX' \qquad (16)$$

Cette écriture s'apparente alors à une loi de comportement linéaire non locale dans la mesure où la déformation au point (X, y, z) dépend non seulement de la contrainte en ce point mais également des contraintes en tous points (X', y, z) du demi-axe $-\infty < X' < X$, le long duquel se lit le « passé » du point X.

Le schéma de la Figure 2 illustre le principe de calcul. Il montre que le choix du formalisme de description des lois viscoélastiques linéaires basé sur la convolution des fonctions de fluage est bien adapté au problème à résoudre ; les historiques de contrainte nécessaires au calcul de loi de comportement ainsi formulée sont contenues dans la solution recherchée. Le problème mécanique est ainsi complètement défini :

- par les équations de « comportement » élastiques ou issues de l'équation (16)

- les équations d'équilibres volumiques et surfaciques, écrites en négligeant les forces d'inertie,

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0} \qquad (17)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = \underline{p} \quad \text{à la surface de la chaussée (empreinte de la charge)} \qquad (18)$$

- la relation de compatibilité cinématique entre déformations et déplacements,

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(M) = \frac{\underline{\underline{grad}}\,\underline{U}(M) + {}^{t}\underline{\underline{grad}}\,\underline{U}(M)}{2} \qquad (19)$$

- les conditions aux limites du maillage sur le déplacement $\underline{U}$
- les conditions de continuité usuelles des déplacements et contraintes aux interfaces entre groupes d 'éléments.

4.1.5 Méthode de résolution

La méthode de résolution comprend plusieurs étapes détaillées dans le mémoire de thèse de JV Heck [1] et reprises en partie dans l'annexe de ce cahier de développement. Celles-ci sont succinctement résumées ici.

1) Le problème précédent est d'abord réécrit dans le repère de la charge roulante à l'aide du principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\text{Maillage}\,\Omega} \sigma : \hat{\varepsilon} \, d\Omega = \hat{P}_e \qquad (20)$$

2) Le calcul du terme de gauche correspondant à la puissance des efforts intérieurs est alors développé en fonction des champs de déplacements virtuel et réel. Le tenseur de déformation virtuelle $\hat{\varepsilon}$ est ainsi exprimé en fonction du champ de déplacement virtuel considéré (équation 19). Le tenseur de contrainte σ est quant à lui développé en utilisant d'une part l 'équation (19) appliquée aux champs de déplacement et de déformations réels et en utilisant d'autre part les expressions des « lois de comportement » élastiques ou viscoélastiques (16) .

3) L'expression du principe des puissances virtuelles obtenue à ce stade est alors classiquement discrétisée suivant la méthode des éléments finis en déplacement, pour obtenir *in fine* un système matriciel de la forme :

$$F_i(U) = F \qquad (21)$$

Avec : U = *vecteur de déplacements nodaux*
F_i = *vecteur des forces nodales, associé aux efforts intérieurs.*
F = *vecteur des forces nodales, associé aux efforts extérieurs.*

- Commentaires :

En la seule présence de lois élastiques ou viscoélastiques linéaires, le vecteur F_i peut s'écrire théoriquement sous forme du produit d'une matrice de rigidité K^* et du vecteur de déplacements U , soit :

$$F_i = K^* U \qquad (22)$$

Mais du fait du caractère non local de la loi viscoélastique (16), la structure de K^* est « largement » plus pleine que les matrices de rigidité usuelles associées aux lois élastiques linéaires. Dès lors la résolution du système linéaire ,

$$K^* U = F \qquad (23)$$

se prête mal aux schémas de résolution directe, basés notamment sur la factorisation des matrices de rigidité. C'est pourquoi, y compris dans ce cas, on adopte dans CVCR une résolution itérative basée sur l'emploi d'une matrice de rigidité élastique «forfaitaire », de structure classique (algorithme de point fixe).

Ce même algorithme présente par ailleurs l'avantage de se prêter à la résolution des problèmes élastiques non linéaires, issus de l'utilisation du modèle de Boyce ou de la loi $k-\theta$. Il permet ainsi de manière générale de traiter les problèmes présentant à la fois des groupes d'éléments à loi de comportement élastique linéaire, élastique non linéaire et viscoélastique linéaire.

4) Algorithme de point fixe :

Le module **CVCR** utilise un algorithme de type point fixe à matrice « élastique constante forfaitaire » qui évite de calculer explicitement la matrice des lois de comportement présentes. Le schéma de résolution est ainsi basé sur les équations :

$$\begin{cases} K^{elastique\ forfaitaire} \Delta U_n = F - F_i(U_{n-1}) \\ U_n = U_{n-1} + \Delta U_n \end{cases} \qquad (24,25)$$

qui correspond bien à un algorithme de type point fixe, si on le réécrit sous la forme :

$$K^{elastique\ forfaitaire} U_n = F - F_i(U_{n-1}) + K^{elastique\ forfaitaire} U_{n-1} \qquad (26)$$

On observe que dans le cas où l'algorithme converge vers un vecteur U_∞ , celui-ci vérifie bien l'équation souhaitée, à savoir :

$$F_i(U_\infty) = F \qquad (27)$$

Cette méthode nécessite, pour constituer la matrice élastique forfaitaire, la donnée d'un module d'Young et d'un coefficient de Poisson forfaitaire par groupe d'éléments.

- Pour les couches élastiques linéaires, on peut reprendre de façon naturelle les valeurs « vraies », données pour ces coefficients.
- Pour les couches viscoélastiques, les coefficients de Poisson peuvent également être fixés à leur valeurs vraies.
- En revanche, le choix des modules d'Young forfaitaires associés aux couches élastiques non linéaires ou aux couches viscoélastiques nécessite un certain soin.

En effet comme illustré par le schéma ci-dessous de la méthode itérative utilisée (cas de l'élasticité non linéaire « durcissante » conforme au modèle de Boyce), la convergence du calcul dépend des quantités forfaitaires choisies.

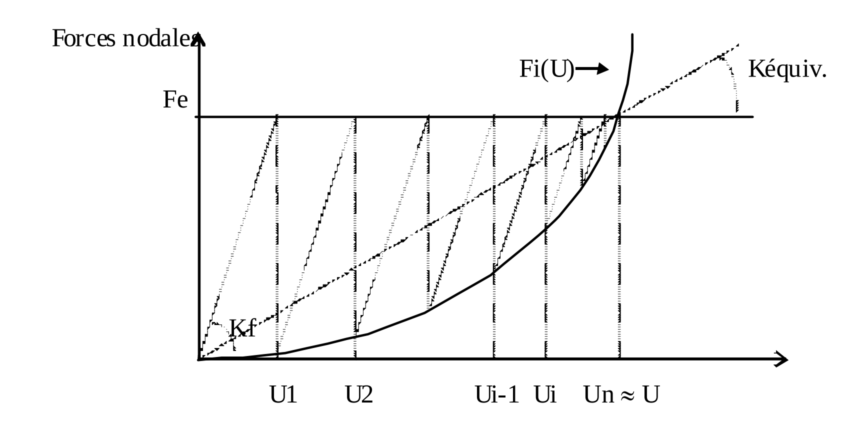


Figure 3: Processus itératif de résolution

Si la pente de la matrice forfaitaire Kf est trop grande, le calcul convergera très lentement. Inversement, si la pente est trop faible, plus faible que la « pente de la matrice élastique » équivalente à la matrice de rigidité du matériau au point solution, Kéquiv., le calcul divergera.

Dans le cas d'un calcul tridimensionnel de grande taille, il convient donc de s'assurer que les quantités forfaitaires retenues permettent bien d'assurer la convergence de l'algorithme et ceci en un nombre raisonnable d'itérations. Il peut être recommandé pour cela d'ajuster la valeur de ces coefficients à l'aide de quelques calculs (rapides) 2D effectués par exemple sur une coupe verticale (x,z) du maillage 3D, située au droit de l'axe de passage de la charge.

4.1.6 Interprétation des résultats de CVCR en termes de module et coefficient de Poisson sécants

Dans une optique d'approximation des calculs CVCR par le logiciel ALIZE de calcul multicouche élastique, linéaire, isotrope, utilisé dans la méthode de dimensionnement des chaussées SETRA/LCPC, il peut être utile d'interpréter les résultats CVCR obtenus, en termes de module d'Young et de coefficient de Poisson sécants, E_S, ν_S. Ces calculs sont effectués dans CVCR au sein du sous-programme ENUPQ et stockés dans le fichier de résultats du module, en lieu et place d'un « troisième chargement ». Ces calculs peuvent également être effectués à partir du logiciel LICESAR.

Il est à noter toutefois que l'exercice est quelque peu arbitraire compte tenu d'une part de la variabilité horizontale de ces quantités, que le logiciel ALIZE ne peut prendre en compte, et d'autre part des éventuels aménagements aux lois de Boyce et $k-\theta$ pris en compte (anisotropie, état de contrainte initial, pression de cohésion) .

En l'occurrence, les équations utilisées pour le calcul de E_s, ν_s dérivent de la loi isotrope élastique linéaire, à savoir :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu_s}{E_s}\sigma - \frac{\nu_s}{E_s} tr(\sigma) I$$

D'où les relations classiques : $tr(\varepsilon) = \frac{1-2\nu_s}{E_s} tr(\sigma)$, $tr(es) = \frac{1+\nu_s}{E_s} tr(s^2)$

Soit : $$\begin{gathered} E_s \; tr(\varepsilon) + \nu_s \; 2tr(\sigma) = tr(\sigma) \\ E_s \; tr(es) - \nu_s \; tr(s^2) = tr(s^2) \end{gathered}$$

Avec : e, s = déviateurs des tenseurs ε, σ .

On en déduit pour une loi élastique linéaire isotrope :

$$E_s = \frac{3tr(s^2)tr(\sigma)}{tr(\varepsilon)tr(s^2) + 2tr(es)tr(\sigma)}$$

$$\nu_s = \frac{-tr(\varepsilon)tr(s^2) + tr(es)tr(\sigma)}{tr(\varepsilon)tr(s^2) + 2tr(es)tr(\sigma)}$$

Ces formules sont utilisées avec les résultats de CVCR sous la forme :

$$E_s = \frac{3tr(\Delta s_{CVCR}{}^2)tr(\Delta\sigma_{CVCR})}{tr(\varepsilon_{CVCR})tr(\Delta s_{CVCR}{}^2) + 2tr(e_{CVCR} \; \Delta s_{CVCR})tr(\Delta\sigma_{CVCR})}$$

$$\nu_s = \frac{tr(e_{CVCR} \; \Delta s_{CVCR})tr(\Delta\sigma_{CVCR}) - tr(\varepsilon_{CVCR})tr(\Delta s_{CVCR}{}^2)}{tr(\varepsilon_{CVCR})tr(\Delta s_{CVCR}{}^2) + 2tr(e_{CVCR} \; \Delta s_{CVCR})tr(\Delta\sigma_{CVCR})}$$

avec :

ε_{CVCR} = tenseur de déformation issu de CVCR

$\Delta\sigma_{CVCR} = \sigma_{CVCR} - \sigma^0$ = tenseur de contrainte issu de CVCR « défalqué » de l'état de contrainte initial

Δs_{CVCR} = déviateur de contrainte associé à $\Delta\sigma_{CVCR}$

4.2 Aspects programmation

La description détaillée de l'algorithme de calcul est présentée dans la thèse de J.V.Heck [1]. La partie de la thèse décrivant cet algorithme est donnée en annexe 1 de ce cahier de développement.

5. RÉALISATION

5.1 Éléments pour le Manuel de programmation

5.1.1 Listes des routines modifiées

Routine	Modifications apportées	Fichier
PREL01	Introduction IMOD = 102,103,104 pour les modèles de comportement viscoélastique de Huet-Sayegh, Kevin-Voigt et Burger Modification KEL02(102) = 11 ; KEL02(103) = 5 ; KEL02(104) = 7	*fami01.f*
PREL02	Introduction IMOD = 102,103,104 pour le modèle de comportement viscoélastique de Huet-Sayegh, Kevin-Voigt et Burger Modification KEL02(102) = 11 ; KEL02(103) = 5 ; KEL02(104) = 7	*fami02.f*
RPCESAR	Ajouter le mot-clé CVCR	*inter.f*

5.1.2 Listes des routines nouvelles

Routine	Fonction *	Fichier
AIGUIL	Détection par ligne d'élément de la loi de comportement des couches de matériau selon le numéro de code IMOD correspondant	*blcvcr.f*
BLCVCR	Module d'exécution : Appel du bloc CVCR	*blcvcr.f*
BOYINI	Calcul des déformations initiales pour le modèle de Boyce	*blcvcr.f*
CREEP	Intégrale entre Xi-1 et Xi de la fonction de fluage en (Xj-x)/V correspondant au modèle utilisé (Huet-Sayegh, Kelvin-Voigt, Burger)	*blcvcr.f*
ELLINE	Calcul des contraintes en fonction des déformations dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire	*blcvcr.f*
ENLBOY	Calcul des contraintes aux points de Gauss à partir des déformations aux points de Gauss pour les matériaux à loi élastique non linéaire de Boyce	*blcvcr.f*
ENUPQ	Dépouillement des résultats de CVCR en module sécant E, coefficient de Poisson sécant NU, pression moyenne P, déviateur Q et rapport Q/P de contrainte et déformation volumique DEFVOL	*blcvcr.f*
EXCVCR	Module d'exécution: exécution du bloc CVCR	*blcvcr.f*
INCVOL	Calcul des contraintes en fonction des déformations par inversion du produit de convolution dans le cas d'une loi de comportement thermo-visco-élastique linéaire	*blcvcr.f*
LECVCR	Lecture de données facultatives pour le module CVCR	*blcvcr.f*
SIGBOY	Calcul des contraintes à partir des déformations via le modèle de Boyce	*blcvcr.f*
SIGTET	Calcul des contraintes à partir des déformations via le modèle K-TETA	*blcvcr.f*

SOCVCR	Stockage des résultats du module CVCR La routine EXCVCR comporte deux appels à SOCVCR. Le premier stocke les déplacements et les contraintes ; le second appel stocke les déplacements et les déformations. L'exploitation par PEGGY de l'un ou l'autre de ces enregistrements est déclenché provisoirement en jouant sur le numéro de cas de charge. Le « cas de charge N°1 » permet de visualiser les champs de déplacements et de contraintes ; le cas de charge N°2 permet de visualiser les champs de déplacements ou déformations.	*blcvcr.f*
TETINI	Calcul des déformations initiales pour le modèle K-TETA	*blcvcr.f*

5.2 Éléments pour le Manuel d'utilisation

5.2.1 Explications générales

Se reporter aux chapitres 1 et 4 précédents

5.2.2 Description des données

Données du module ELEM

I – Lignes d'en-tête

```
* Se référer au Manuel de référence de la version Standard.
```

II – Données relatives à l'ensemble des éléments

```
* Se référer au Manuel de référence de la version Standard.
```

III – Données des caractéristiques des groupes d'éléments

Famille 01 :

```
* NOMG, ACTI, IGCOL                                                (d)
     NOMG    : Nom du groupe considéré (40 caractères à partir de la
               colonne 1).
     ACTI    : Indicateur d'activité du groupe considéré (un caractère
               entre les colonnes 41 et 80);
               = A ou a si le groupe considéré est actif.
               = I ou i si le groupe est inactif.
     IGCOL    Indicateur de couleur affectée au groupe considéré.

* Si le groupe est inactif, fin des données du groupe.


* Si le groupe est actif :

** IMOD, INAT                                                      (d)
     IMOD    : Code de la loi.
               =  1 Élasticité linéaire isotrope.
               = 83 Élasticité non linéaire anisotrope de Boyce
                    ou modèle k-θ .
               =102 Visco-élasticité linéaire isotrope de Huet-Sayegh.
               =103 Visco-élasticité linéaire isotrope de Kelvin-Voigt.
               =104 Visco-élasticité linéaire isotrope de Burger.
     INAT    : Indicateur de la nature du problème uniquement dans le
               cas d'un calcul bidimensionnel.
               =  1 Déformation plane.
               =  2 Déformation axisymétrique.

** Si IMOD=1 (élasticité linéaire isotrope) :

*** RO, YOUNG, POISS                                               (d)
     RO      : Masse Volumique.
```

YOUNG : Module d'Young.

POISS : Coefficient de Poisson.

** Si IMOD=83 (modèle de Boyce ou modèle k-θ) :

*** Pour le modèle de Boyce :

**** RO, YOUNG, POISS, Ka, Ga, Pa, Pc, N, Gamma (d)

RO : Masse Volumique.

YOUNG : Module d'Young forfaitaire.

POISS : Coefficient de Poisson forfaitaire.

Ka : Module de compressibilité volumique(>0), pour (P*=Pa, Q*=0.).

Ga : Module de cisaillement (>0.), pour (P*=Pa, Q*=0.).

Pa : Pression atmosphérique(>0.).

Pc : Pression de cohésion (≥ 0)

N : Exposant de non linéarité (0<N<1).

Gamma : Coefficient d'anisotropie(>0.) ; = 1. Isotropie.

*** Pour le modèle k-θ :

**** RO, YOUNG, POISS, E°, ν, Pa, Pc, N, Gamma (d)

RO : Masse Volumique.

YOUNG : Module d'Young forfaitaire.

POISS : Coefficient de Poisson forfaitaire (à choisir de préférence égal au véritable coefficient de Poisson du matériau en question, satisfaisant au modèle k-θ).

E° : Module d'Young pour P*=Pa.

ν : Coefficient de Poisson (réel).

Pa : Pression atmosphérique(>0.).

Pc : Pression de cohésion (≥ 0)

N : Exposant de non linéarité (0<N<1).

Gamma : Code provisoire d'identification du modèle matériel k-θ; = 1000. valeur obligatoire.

** Si IMOD=102 (modèle de Huet-Sayegh) :

*** RO, YOUNG, POISS, $E_\infty, E_0, k, h, \delta, A_0, A_1, A_2$ (d)

RO : Masse Volumique.

YOUNG : Module d'Young forfaitaire.

POISS : Coefficient de Poisson.

E_∞ : Module élastique instantané.

E_0 : Module statique.

k, h : Exposants des amortisseurs paraboliques tels que 1 > h > k > 0 .

δ : Coefficient adimensionnel >0 .

A_0, A_1, A_2 : Coefficients de la fonction $\tau(\theta)$.

** Si IMOD=103 (modèle de Kelvin-Voigt) :

*** RO, YOUNG, POISS, E, η (d)

RO : Masse Volumique.

YOUNG : Module d'Young forfaitaire.

POISS : Coefficient de Poisson.

E : Module du ressort.

η : Viscosité de l'amortisseur.

** Si IMOD=104 (modèle de Burger):

*** RO, YOUNG, POISS, E_1, E_2, η_1, η_2 (d)

RO : Masse Volumique.

YOUNG : Module d'Young forfaitaire.

POISS : Coefficient de Poisson.

E_1 : Module du ressort de la partie Maxwell.

E_2 : Module du ressort de la partie Kelvin-Voigt.

η_1 : Viscosité de l'amortisseur de la partie Maxwell.

η_2 : Viscosité de l'amortisseur de la partie Kelvin-Voigt.

Remarque :

L'influence de la température apparaît de manière explicite dans le modèle 102. En revanche, dans les modèles 103 et 104, on a conservé l'écriture classique dans laquelle la susceptibilité thermique est implicite en fonction de la valeur du paramètre de viscosité. Les informations relatives à l'introduction d'un gradient de température dans la chaussée (voir chapitres précédents de ce fascicule) ne sont donc valables que pour le modèle 102. On pourra toujours avec les modèles 103 et 104 introduire un gradient de température en subdivisant la ou les couches de matériau visco-élastique en couches d'éléments où η prendra des valeurs différentes.

Famille 02 :

* NOMG, ACTI, IGCOL (d)

NOMG : Nom du groupe considéré (40 caractères à partir de la colonne 1).

ACTI : Indicateur d'activité du groupe considéré (un caractère entre les colonnes 41 et 80);
= A ou a si le groupe considéré est actif.
= I ou i si le groupe est inactif.

```
     IGCOL   Indicateur de couleur affectée au groupe considéré.

 * Si le groupe est inactif, fin des données du groupe.


 * Si le groupe est actif :

 ** IMOD                                                      (d)
     IMOD    : Code de la loi.
               =  1 Élasticité linéaire isotrope.
               = 83 Élasticité non linéaire anisotrope de Boyce
                    ou modèle k-θ .
               =102 Visco-élasticité linéaire isotrope de Huet-Sayegh.
               =103 Visco-élasticité linéaire isotrope de Kelvin-Voigt.
               =104 Visco-élasticité linéaire isotrope de Burger.
```

** La suite des données est identique à celle de la famille 01.

Données du module CHAR

I - Lignes d'en-tête

```
 * Se référer au mode d'emploi de la version Standard.
```

II - Options de chargement

OPTION SIG — **Initialisation et chargement dû à un état de contraintes (mécaniques). Valable uniquement pour les couches non visqueuses.**

DONNEES :

```
 * SIG                                                  (mot-clé)

 * M1, ICAL                                                   (d)
     M1      : Indicateur des données des contraintes initiales relatif
               à l'ensemble des éléments de volume;
               =  0 Les contraintes initiales sont calculées par
                    l'option IOPT
                    (seule possibilité pour le module CVCR).
     ICAL    : Indicateur d'initialisation et/ou de mise en chargement
               des contraintes initiales
               =  0 Initialisation des contraintes sans prendre en
                    compte le chargement correspondant
                    (seule possibilité pour le module CVCR : le
                    chargement est automatiquement pris en compte
                    explicitement dans les lois de comportement).


 * IOPT                                                       (d)
     IOPT    : Indicateur permettant de définir le procédé utilisé pour
               la génération des contraintes initiales
               (se référer au mode d'emploi de la version Standard).
```

Remarque :

Il est essentiel de veiller à ce que le chargement introduit (partie du chargement inhérente à la présence de contraintes initiales : poids propre, pression de fluide, etc.) équilibre les contraintes initiales de la structure (bien que celles-ci soient introduites en imposant l'indicateur ICAL à 0).

Données du module CVCR

1 - Lignes d'en-tête

* CVCR (mot-clé)

2 - Donnée des paramètres généraux

* NX (d)

NX : Nombre d'éléments du maillage selon la direction de passage de la charge. Attention au fait que dans CVCR le maillage à un rôle important, la direction de passage doit être l'axe X.
= 1 dans le cas d'une structure à géométrie quelconque ne contenant pas de matériaux visco-élastiques.

* SPEED (d)

SPEED : Vitesse de passage de la charge roulante (mettre une valeur arbitraire s'il n'y a pas de matériau viscoélastique).

* NITERA, TOL (d)

NITERA : Nombre maximal d'itérations désiré.

TOL : Critère de convergence du calcul correspondant à la valeur nodale maximale de la différence de déplacements $|U_n - U_{n-1}|$ suivant chaque direction correspondant à deux itérations successives. (Prendre par exemple TOL de l'ordre de 1% du déplacement maximal attendu en fin de calcul) (U_n est le champ de déplacement obtenu à l'itération n).

Le programme s'arrête lorsque l'une ou l'autre de ces conditions est remplie.

* IRG, ISG, IRCA (d)

IRG : Indicateur de reprise ;
= 0 Nouveau calcul.
= 1 Reprise sur fichiers (matrice de rigidité triangulée et diagonale).

ISG : Indicateur de stockage ;
= 0 Calcul sans stockage.
= 1 Calcul avec stockage sur fichiers (matrice de rigidité triangulée et diagonale) pour reprise ultérieure.

IRCA : Indicateur de reprise des calculs après exécution complète ou interruption en cours d'un calcul précédent. Cette possibilité est assurée grâce à un stockage systématique à chaque itération, dans un fichier nommé « memincr » (qui se crée automatiquement), des informations nécessaires pour une éventuelle reprise du calcul à cette itération ;
= 0 Cas d'un premier calcul.

= 1 Reprise d'un calcul à partir de l'itération d'arrêt du calcul précédent.

Remarque : IRCA s'utilise indépendamment de IRG, ISG.

* Si IRG=1 ou ISG=1, lecture de :

** NOMFD (d)

NOMFD : Nom du fichier contenant la diagonale de la matrice triangulée.

** NOMFS (d)

NOMFS : Nom du fichier contenant la partie supérieure de la matrice triangulée.

3 - Autres données

L'introduction des autres données du module **CVCR** est structurée en option annoncée par le mot-clé de 3 lettres suivant :

SOR : Résultats complémentaires dans le fichier de résultats

TET : Données des températures pour les matériaux régis par le modèle de comportement de Huet-Sayegh (IMOD=102).

Option TET — Données des températures pour les matériaux régis par le modèle de Huet-Sayegh (IMOD=102)

EXPLICATIONS

Omettre cette option si aucun matériau n'est régi par un modèle de comportement de Huet-Sayegh (IMOD=102).

DONNÉES

* TET (mot-clé)

* IDTETA (d)

IDTETA : Indicateur du type de données en température ;
= 0 Dans le cas d'une température homogène dans toute la structure ;
= 1 Dans le cas d'un gradient vertical de température dans la structure.

* Si IDTETA = 0, lecture de :

** TETA (d)

TETA : Température dans la structure ou valeur arbitraire en l'absence de la loi de comportement IMOD = 102.

* Si IDTETA = 1, lecture de :

```
** NCTETA                                                           (d)

     NCTETA   :Nombre de valeurs de température définissant le
               gradient.

** (COTEZ(I), TETA(I), I=1, NCTETA)                                 (d)

     COTEZ    :Cote verticale des positions où la température est
               connue.

     TETA     :Valeur correspondante de la température.

     Remarque : Ces données doivent être introduites par ordre de cote
               décroissante. Le programme interpole linéairement entre
               les valeurs connues.
```

Exemple :

Gradient de température défini par trois couples de valeurs :

+ 10°C en surface (cote 0.),

- 7°C à 5m de profondeur,

- 20°C à 12m de profondeur,

Les données de l'option TET sont les suivantes :

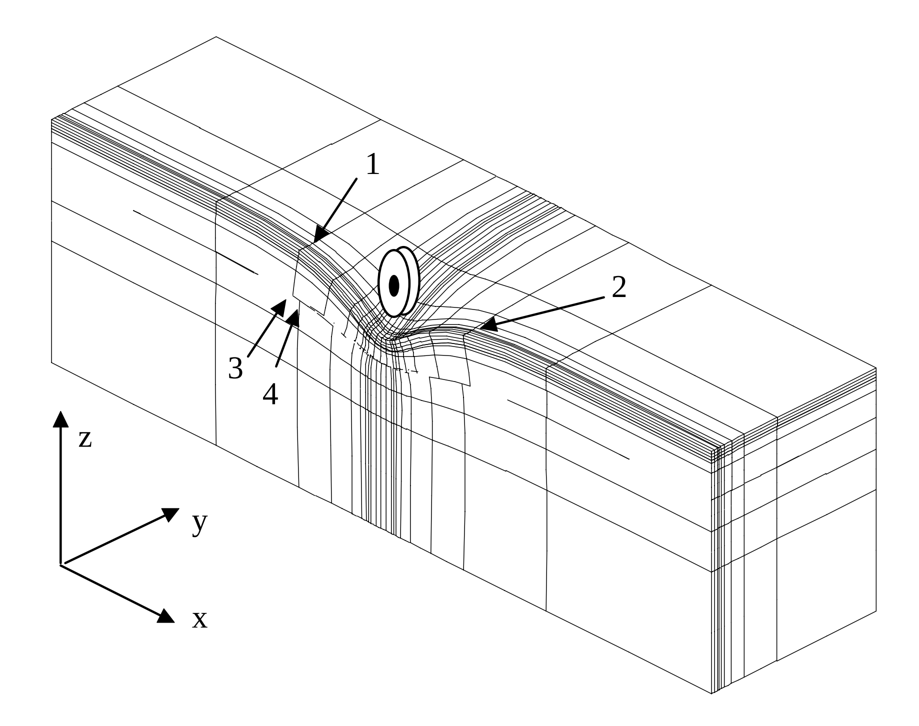
```
TET                                (mot-clé)
1                                  (IDTETA)
3                                  (NCTETA)
0.  10.    -5.  -7.    -12.  -20.     (COTEZ,TETA)
```

5.2.3 Exemple(s) de mise en œuvre commenté(s)

L'exemple suivant a pour objet de déterminer les champs de déplacements et de contraintes dans une structure routière composée de bas en haut d'un sol naturel élastique linéaire, d'une couche de gnt élastique non linéaire (40 cm) et d'un béton bitumineux (BB) viscoélastique linéaire (9cm).
Le maillage de la structure 3D comporte des éléments MTH20 ainsi que des éléments spéciaux de rigidité SP3R (on aurait pu tout aussi bien mettre des éléments de relation linéaire) permettant un glissement parfait entre la couche de gnt et le massif de sol.

On notera l'utilisation de l'option SIG particulière dans ce module (voir explications dans cette note).

« Photo » de la déformée du maillage
lorsque la roue est en son centre étant arrivée par la droite.



Du fait de la symétrie du problème par rapport à l’axe Ox, le maillage ne représente que la moitié de la structure de chaussée.

Résultats en déplacement (mm/100) :

points	U	V	W	commentaires
1	0,8228	0	-7,675	1 et 2 mettent en évidence
2	-1,081	0	-11,12	la visco-élasticité
3	-12,58	0	-14,84	3 et 4 mettent en évidence
4	3,185	0	-14,84	le glissement à l’interface

Jeu de données correspondant :

```
EXEC
COMT
----------
notic
calcu
----------
COOR
  1  1
ELEM
  1  1
BB
102   0.   8500.  .38
     30000.  70.  0.18  0.53  2.9  3.022  -0.389  0.00198
GNT
83   0.02  850.  .4
     32.  62.  0.1  .28  .8
SP3R
0
0.
0.   0.
0.   0.   1.E11
0.   0.           0.   0.
0.   0.           0.   0.   0.
0.   0.  -1.E11   0.   0.   1.E11
MASSIF
1   0.02  90.  .3
COND (conditions aux limites non décrites ici)
   0
NUL
CHAR
   2
PUR (facettes chargées non décrites ici)
   .6
POI
SIG
  0  0
  3
  3.
  -.49   0.02        1.  1.
  -.09   0.02        1.  1.
    0.   0.          1.  1.
  0
CVCR
  20
  17.
  100  0.001
  0  0  0
TET
  1
  2
  0.   15.   -0.1   13.
```

6. TEST DE LA FONCTIONNALITÉ

Ce chapitre décrit l'ensemble des jeux de données permettant de tester la fonctionnalité. Il est destiné à alimenter ultérieurement le **Manuel de validation** du solveur CESAR.

6.1 Plan de tests

Liste des cas test

Cas test 2D en déformation plane (modèles élastiques non-linéaires seulement)		
Specs	**Nom (.data)**	**Description**
SP01	sp01_boy1	Grave non traitée soumise à une contrainte homogène. Poids propre négligé. Calcul non linéaire (20 nœuds, 4 MBQ8, modèle de Boyce, IMOD=83). **Validation analytique.**
SP04	sp01_tet1	Grave non traitée soumise à une contrainte homogène. Poids propre négligé. Calcul non linéaire (20 nœuds, 4 MBQ8, modèle K-theta, IMOD=83, Gamma=1000). **Validation analytique.**

Cas test 2D-axisymétrique (modèles élastiques non-linéaires seulement)		
Specs	**Nom (.data)**	**Description**
SP02	tcr1_ccp	Éprouvette cylindrique de grave non traitée soumise à un essai triaxial avec contrainte de confinement constante. Poids propre négligé. État de contrainte maximal seulement. Calcul non linéaire (1633 nœuds, 512 MBQ8, modèle de Boyce, IMOD=83). **Validation analytique.**
SP05	tcr1_ccp2	Éprouvette cylindrique de grave non traitée soumise à un essai triaxial avec contrainte de confinement constante. Poids propre négligé. État de contrainte maximal seulement. Calcul non linéaire (1633 nœuds, 512 MBQ8, modèle K-theta, IMOD=83, Gamma=1000). **Validation analytique.**
SP02	fwd1_a2s1	Chaussée souple soumise à un essai au déflectomètre FWD. Forces d'inertie négligées. Calcul non linéaire (4661 nœuds, 1500 MBQ8, deux groupes élastiques, IMOD = 1, et un groupe non linéaire, modèle de Boyce, IMOD=83). **Comparaison avec données de terrain.**

Cas test 3D		
Specs	**Nom (.data)**	**Description**
SP03	sp03_boy1	Cube fictif de grave non traitée soumis à une sollicitation triaxiale homogène. Poids propre négligé. Calcul non linéaire (20 nœuds, 1 MTH20, modèle de Boyce, IMOD=83). **Validation analytique.**
SP03	sp03_boy2	Cube fictif de grave non traitée soumis à une sollicitation triaxiale homogène (contraintes normales et de cisaillement). Ajout d'une pression de cohésion. Poids propre négligé. Calcul non linéaire (20 nœuds, 1 MTH20, modèle de Boyce, IMOD=83). **Validation analytique.**
SP06	sp03_tet1	Cube fictif de grave non traitée soumis à une sollicitation triaxiale homogène. Poids propre négligé. Calcul non linéaire (20 nœuds, 1 MTH20, modèle K-theta, IMOD=83, Gamma=1000). **Validation analytique.**
SP07	mvigm_cal3	Massif viscoélastique fictif sollicité par une charge roulante (13260 nœuds, 2808 MTH20, 1 groupe viscoélastique modèle de Huet-Sayegh, IMOD = 102) **Validation analytique.**
SP03	c8s1_a	Chaussée souple soumise au manège de fatigue. Calcul non linéaire (35721 nœuds, 8000 MTH20, 2 groupes élastiques, IMOD = 1, un groupe non linéaire, modèle de Boyce, IMOD = 83). **Comparaison avec données de terrain.**
SP08	c8v1_b	Chaussée souple soumise au manège de fatigue. Calcul avec enrobé bitumineux visco-élastique et grave non traitée non linéaire (37601 nœuds, 8424 MTH20, 1 groupe visco-élastique, modèle de Huet-Sayegh, IMOD = 102, un groupe non linéaire, modèle de Boyce, IMOD = 83, un groupe élastique linéaire IMOD = 1). **Comparaison avec données de terrain.**

6.2 Fiches de test

CVCR	Sp01_boy1

Étude : **Modèle :**

Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 20/12/2007

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle de Boyce
Calcul 2D en déformations planes

Maillage : Bidimensionnel (déformations planes) (1 x 1 m)
Nb. noeuds : 20 Nb. éléments : 4 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MBQ8

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire de Boyce (IMOD=83)

Ka = 20.1 MPa, Ga = 39 MPa, n= 0.351, gamma=0.521, Pa=0.1 MPa, Pc = 0

Conditions aux limites :

Déplacement horizontal bloqué (u = 0) sur l'une des limites latérales (lorsque x = 0)

Déplacement vertical bloqué (v = 0) sur la limite inférieure (lorsque z = -1)

Chargement :

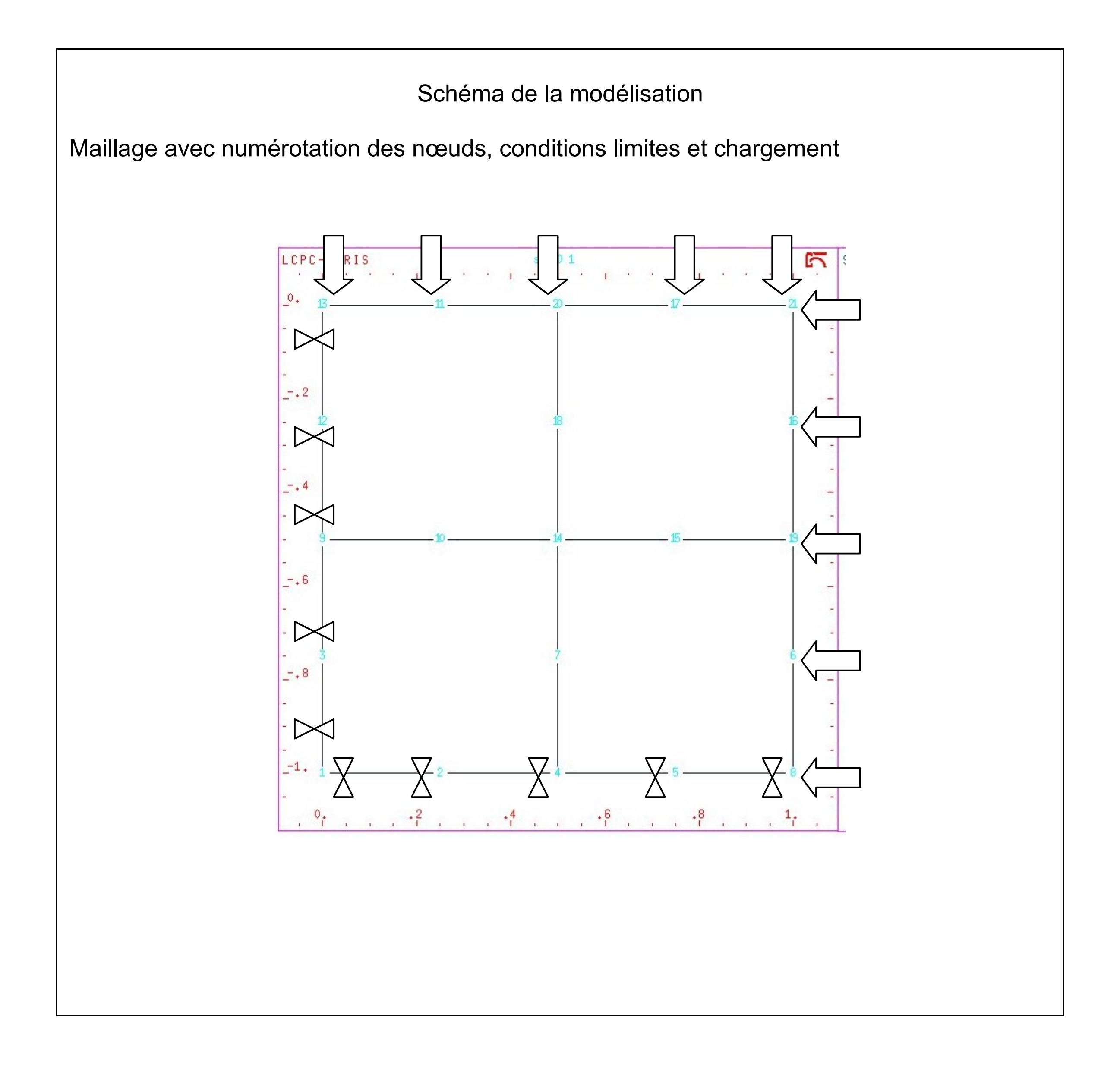
Pression verticale uniformément répartie au sommet de l'échantillon (0,20 MPa)
Pression horizontale uniforme sur le pourtour de l'échantillon (0,02 MPa)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.

Schéma de la modélisation

Maillage avec numérotation des nœuds, conditions limites et chargement



Jeu de données correspondant (sp01_boy1.data):

```
EXEC
COMT
----------
cas fictif en deformation plane (modele de Boyce)
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83 1  0.02000  400  0.35  20.1  39.0  0.1  0  0.351  0.521
COND
  0
NUL
 2
   5
     1     3     9    12    13
 1 0 0
 0
NUL
 2
   5
     1     2     4     5     8
 0 1 0
 0
CHAR
  2
PUR       1
   2   3
    13    20    11       20    21    17
       0.200000
PUR       1
   2   3
     8    19     6       19    21    16
       -0.020000
CVCR
 1
 1
 1000 0.0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

Validation analytique - modèle de Boyce (sp01_boy1.data)

Soit :

	Calcul analytique	Résultats CVCR
Ka =	20.1 MPa	↓
Ga =	39 MPa	
n =	0.351	
gamma =	0.521	
pa =	0.1 MPa	
σ_{zz} =	-0.2 MPa	-0.2
σ_{xx} =	-0.02 MPa	-0.01999999
σ_{yy} = [inconnu tel que ε_{yy} = 0]		-0.00267404
$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$		

Alors:

Calcul approché avec l'hypothèse que $\sigma_{zz} = -0.00267404$

	Calcul analytique	Résultats CVCR
$p^* = -\dfrac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \gamma\sigma_{zz}}{3} =$	0.0422913	
$q^* = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx}-\gamma\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy}-\gamma\sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \gamma\sigma_{xz}^2 + \gamma\sigma_{yz}^2)}$	0.09286	
$\varepsilon_v{*} = -\dfrac{1}{K_a}\dfrac{p{*}^n}{p_a^{\,n-1}}\left[1 + \dfrac{(n-1)K_a}{6G_a}\left(\dfrac{q*}{p*}\right)^2\right] =$	-0.00268944	
$\varepsilon_q{*} = -\dfrac{1}{3G_a}\dfrac{p{*}^n}{p_a^{\,n-1}}\dfrac{q*}{p*} =$	-0.001387457	

Il reste 2 inconnues à résoudre $(\varepsilon_{xx}\ et\ \varepsilon_{zz})$ avec les deux équations suivantes sachant que $\varepsilon_{yy} = 0$:

$$\varepsilon_q{*} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{zz}/\gamma)^2 + (\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz}/\gamma)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2/\gamma + \varepsilon_{yz}^2/\gamma)^2}$$

$$\varepsilon_v^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}/\gamma$$

	Calcul analytique	Résultats CVCR
d'où $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\left(3\varepsilon_v^* \pm \sqrt{3}\sqrt{9\varepsilon_q^* - \varepsilon_v^*}\right)}{6}$	-0.000388299	-0.000388297
$\varepsilon_{zz} = \gamma(\varepsilon_v^* - \varepsilon_{xx})$	-0.001185449	-0.00118545

Résultats :

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les résultats issus de CESAR-CVCR sont reportés dans la dernière colonne du tableau ci-haut. Ils sont très près de la solution analytique. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir subdivisé le maillage en éléments de taille différente. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1, σ_2 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon.

CVCR	Sp01_tet1

Étude : **Modèle :**

Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 18/12/2007

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle k-θ
Calcul 2D en déformations planes

Maillage : Bidimensionnel (déformation plane) (1 x 1 m)
Nb. noeuds : 20 Nb. éléments : 4 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MBQ8

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire K-theta (IMOD=83 avec code provisoire gamma=1000)

POISS = 0,35; E° = 416,7 MPa (K = 858,1 MPa); N = 0,4 (α = 0,6); Pa = 0,1 MPa ; Pc = 0.

Conditions aux limites :

Déplacement horizontal bloqué (u = 0) sur l'une des limites latérales (lorsque x = 0)

Déplacement vertical bloqué (v = 0) sur la limite inférieure (lorsque z = -1)

Chargement :

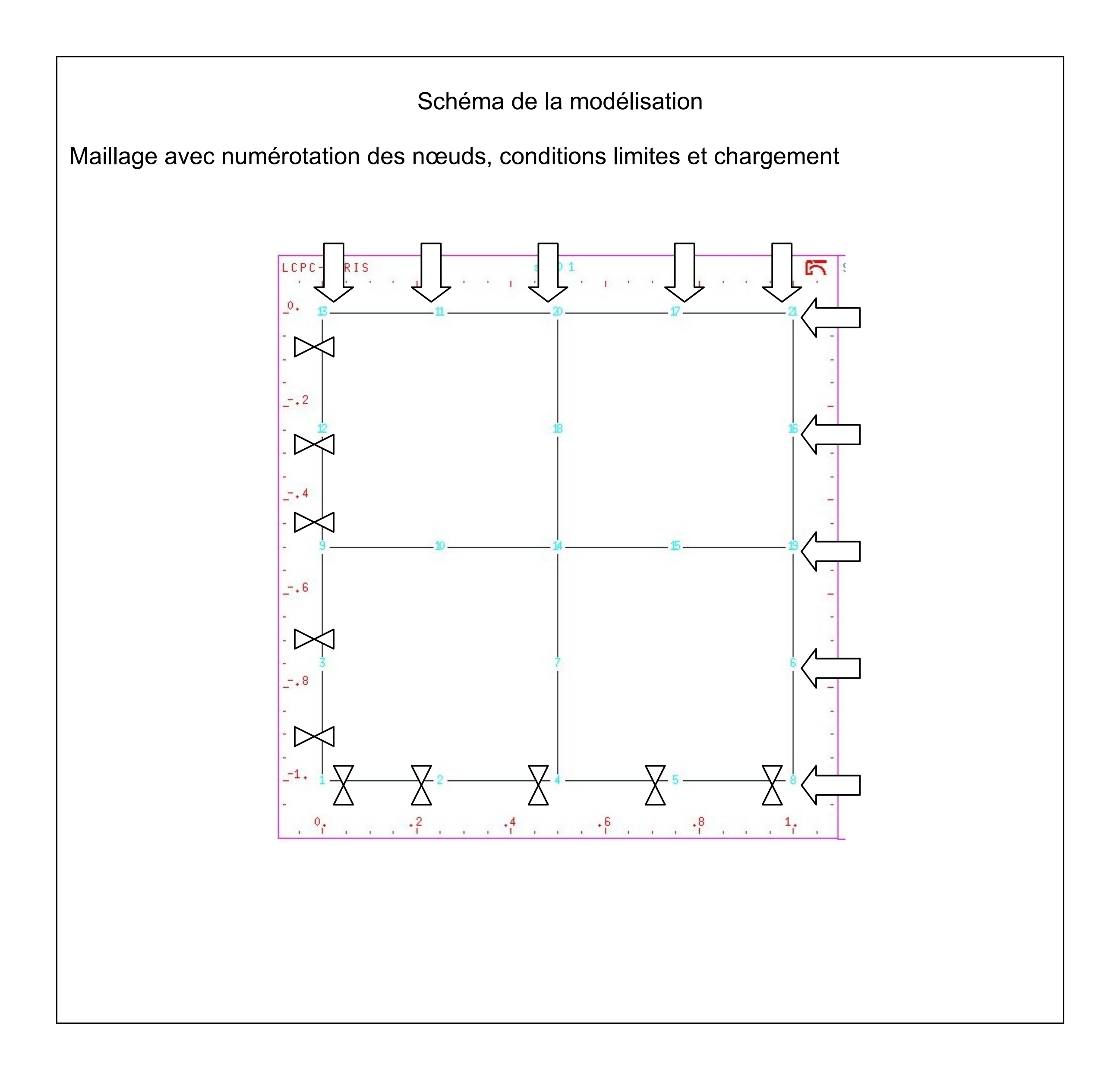
Pression verticale uniformément répartie au sommet de l'échantillon (0,20 MPa)
Pression horizontale uniforme sur le pourtour de l'échantillon (0,02 MPa)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.

Schéma de la modélisation

Maillage avec numérotation des nœuds, conditions limites et chargement



Jeu de données correspondant (sp01_tet1.data):

```
EXEC
COMT
----------
cas fictif en deformation plane (modele k-theta)
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83  1  0.02000 600 0.35 416.7 0.35 0.1 0 0.4 1000
COND
  0
NUL
 2
   5
     1     3     9    12    13
 1 0 0
 0
NUL
 2
   5
     1     2     4     5     8
 0 1 0
 0
CHAR
  2
PUR        1
   2   3
    13    20    11       20    21    17
       0.200000
PUR        1
   2   3
     8    19     6       19    21    16
       -0.020000
CVCR
 1
 1
 1000 0.0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

Soit:

	Calcul analytique		Résultats CVCR
$E°$ =	416.7	MPa	↓
N =	0.4		
p_a =	0.1	MPa	
largeur = b =	1	m	
hauteur = h =	1	m	
σ_1 =	-0.02	MPa	-0.02
σ_3 =	-0.2	MPa	-0.2
ε_2 =	0		
υ =	0.35		

Alors:

	Calcul analytique	Résultats CVCR
$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_3)\right] = 0$		
$\Rightarrow \sigma_2 = \upsilon(\sigma_1 + \sigma_3)$ =	-0.077	-0.077
$p = -(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$ =	0.099	
$E = E° \cdot (p/pa)^{(1-N)}$ =	414.1947761	
$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$ =	0.000185782	0.000185782
$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$ =	-0.000400898	-0.000400898

Résultats :

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les résultats issus de CESAR-CVCR sont reportés dans la dernière colonne du tableau ci-haut. Ils sont identiques à la solution analytique. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir subdivisé le maillage en éléments de taille différente. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1, σ_2 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon.

CVCR	tcr1_ccp

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St Laurent
Révision : 9/12/2007

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle de Boyce
Cas étudié : Simulation d'un essai triaxial cyclique sur une éprouvette de grave non traitée en 2D (axisymétrique).

Maillage : Axisymétrique (rayon = 0,080 m ; demi-hauteur = 0,160 m)
Nb. nœuds : 1633 Nb. éléments : 512 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MBQ8

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire de Boyce (IMOD=83)

Ka = 20.1 MPa, Ga = 39 MPa, n= 0.351, gamma=0.521, Pa=0.1 Mpa, Pc = 0

Conditions aux limites :

u = 0 sur l'axe de symétrie (lorsque x = 0)

v = 0 sur l'axe situé à y = -0,160 (bas du maillage, centre de l'éprouvette)

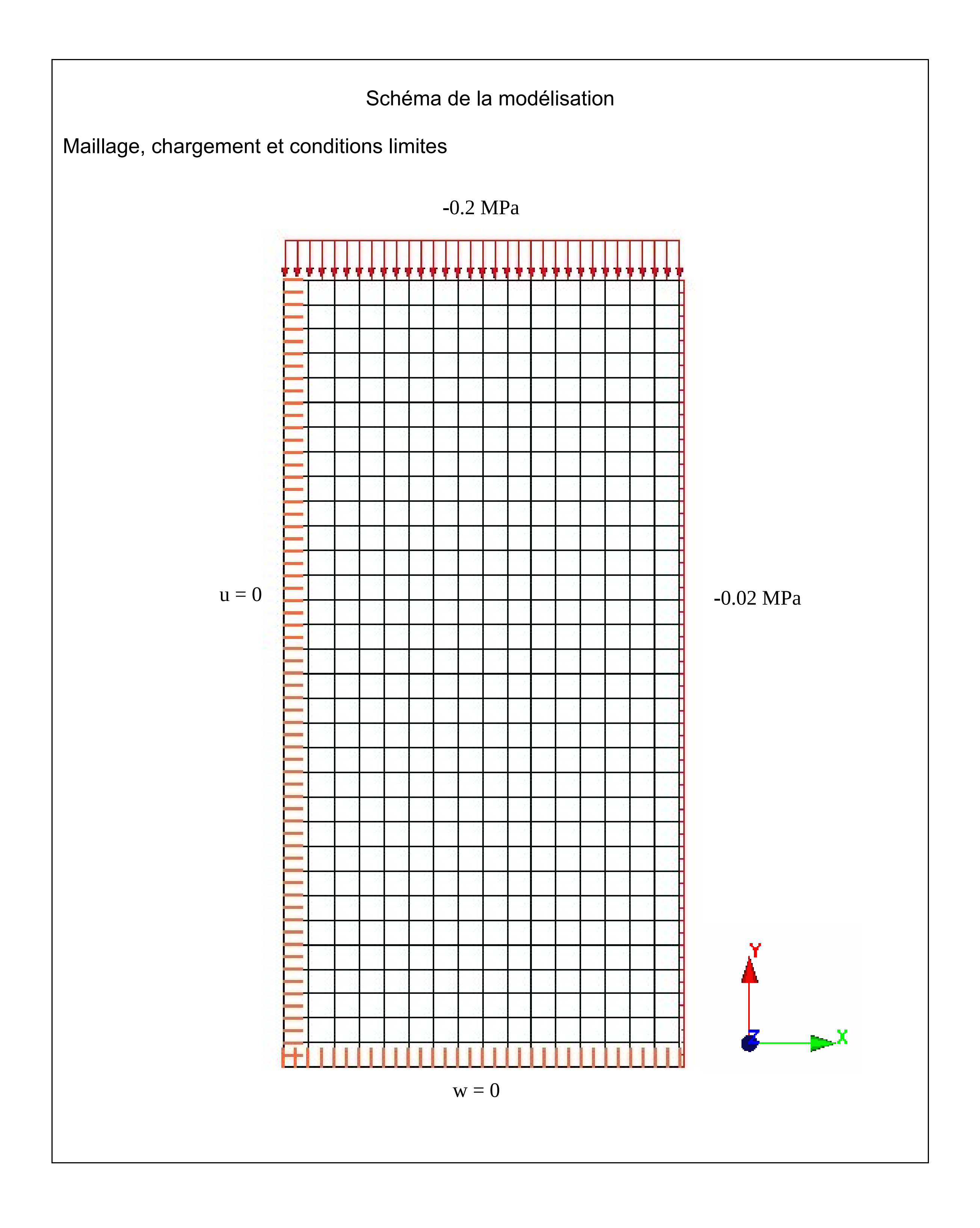
Chargement :

Pression verticale uniformément répartie au sommet de l'échantillon (σ_{zz} = 0,20 MPa)
Pression horizontale uniforme sur le pourtour de l'échantillon (σ_{xx} = 0,02 MPa)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.

Le maillage ne représente que la moitié supérieure de l'éprouvette, sachant qu'il y a symétrie avec la partie inférieure.


Schéma de la modélisation
Maillage, chargement et conditions limites
-0.2 MPa
u = 0
-0.02 MPa
w = 0
Y
X
Z

Jeu de données correspondant (tcr1_ccp.data):

```
EXEC
COMT
----------
triaxial a confinement constant (modèle de Boyce)
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83 2 0.02000 400 0.35 20.1 39.0 0.1 0 0.351 0.521
COND
  0
NUL
 2
  65
     1     3     7     9    19    21    37    39    61    63
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 1 0 0
 0
NUL
 2
  33
     1     2     4     5    13    14    28    29    49    50
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 1 0
 0
CHAR
  2
PUR        1
  16   3
  1555  1560  1553     1560  1565  1558
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
       0.200000
PUR
   32    3
  680  685  678  685  690  683  690  695  688  695  700  693
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
     -0.02
CVCR
 1
 0
 1000 .0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

Validation analytique - modèle de Boyce (tcr1_ccp.data)

Soit :

	Calcul analytique	Résultats CVCR
Ka =	20.1 MPa	↓
Ga =	39 MPa	
n =	0.351	
gamma =	0.521	
pa =	0.1 MPa	
Demi-hauteur de l'éprouvette = h =	0.160 m	
Rayon de l'éprouvette = r =	0.080 m	
σ_1 =	-0.02 MPa	-0.0199998
σ_2 =	-0.02 MPa	-0.0199998
σ_3 =	-0.2 MPa	-0.2

Alors:

	Calcul analytique	Résultats CVCR
$p^* = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \gamma \cdot \sigma_3)/3 =$	0.04806667	
$q^* = \lvert \gamma \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \rvert =$	0.0842	
$\varepsilon_v^* = -\frac{1}{K_a}\frac{p^{*n}}{p_a^{\,n-1}}\left[1 + \frac{(n-1)K_a}{6G_a}\left(\frac{q^*}{p^*}\right)^2\right] =$	-0.00318898	
$\varepsilon_q^* = -\frac{1}{3G_a}\frac{p^{*n}}{p_a^{\,n-1}}\frac{q^*}{p^*} =$	-0.00115774	
$\varepsilon_1 = \varepsilon_v^*/3 - \varepsilon_q^*/2 =$	-0.00048413	-0,00048412
$\varepsilon_3 = \gamma \cdot \varepsilon_v^*/3 + \gamma \cdot \varepsilon_q^* =$	-0.001157	-0.001157
Contour de l'éprouvette: $u = r \cdot \varepsilon_1 =$	-3.873E-5	-3,87296E-5
Sommet de l'éprouvette: $v = h \cdot \varepsilon_3 =$	-0.00018512	-0,00018512

Nota : il est aussi possible de retrouver les modules de rigidité de la façon suivante :

$$K^* = \frac{K_a\left(p^*/p_a\right)^{(1-n)}}{1 - \frac{(1-n)\,K_a}{6\,G_a}\left(\frac{q^*}{p^*}\right)^2} = \quad 15.07274$$

$$G^* = G_a\left(p^*/p_a\right)^{(1-n)} = \quad 24.24272$$

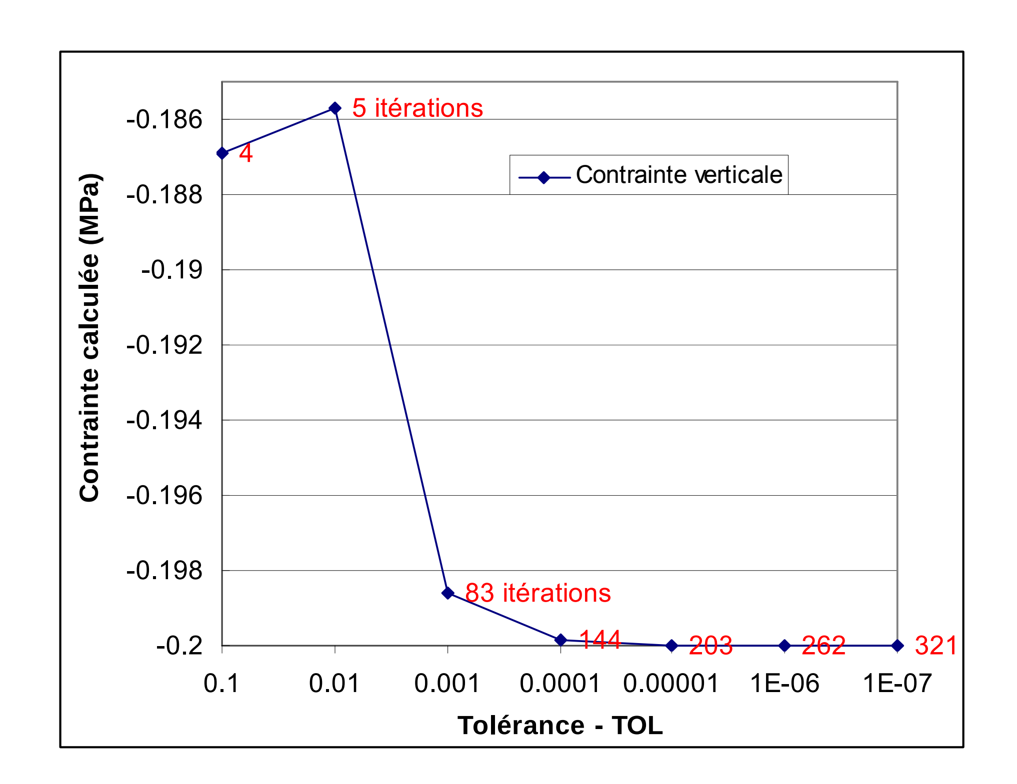
$$E_h = 9\,K^*G^*/\left(3\,K^* + G^*\right) = \quad 47.35$$

$$E_v = E_h/\gamma^2 = \quad 174.42$$

Résultats :

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les résultats issus de CESAR-CVCR sont reportés dans la dernière colonne du tableau ci-haut. Ils sont très près de la solution analytique. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir un seul élément. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon. La figure suivante montre l'importance d'utiliser une tolérance assez fine pour converger vers une solution adéquate.

Effet du choix de la tolérance de calcul sur la contrainte verticale σ_3 calculée


Contrainte calculée (MPa)
-0.186
-0.188
-0.19
-0.192
-0.194
-0.196
-0.198
-0.2
5 itérations
4
Contrainte verticale
83 itérations
144
203
262
321
0.1
0.01
0.001
0.0001
0.00001
1E-06
1E-07
Tolérance - TOL

CVCR	tcr1_ccp2

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St Laurent
Révision : 9/12/2007

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle K-theta
Cas étudié : Simulation d'un essai triaxial cyclique sur une éprouvette de grave non traitée en 2D (axisymétrique)

Maillage : Axisymétrique (rayon = 0,080 m ; demi-hauteur = 0,160 m)
Nb. noeuds : 1633 Nb. éléments : 512 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MBQ8

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire K-theta (IMOD=83 avec code provisoire gamma=1000)

POISS = 0,35; E° = 416,7 MPa (K = 858,1 MPa); N = 0,4 (α = 0,6); Pa = 0,1 MPa ; Pc = 0.

Conditions aux limites :

u = 0 sur l'axe de symétrie (lorsque x = 0)

v = 0 sur l'axe situé à y = -0,160 (bas du maillage, centre de l'éprouvette)

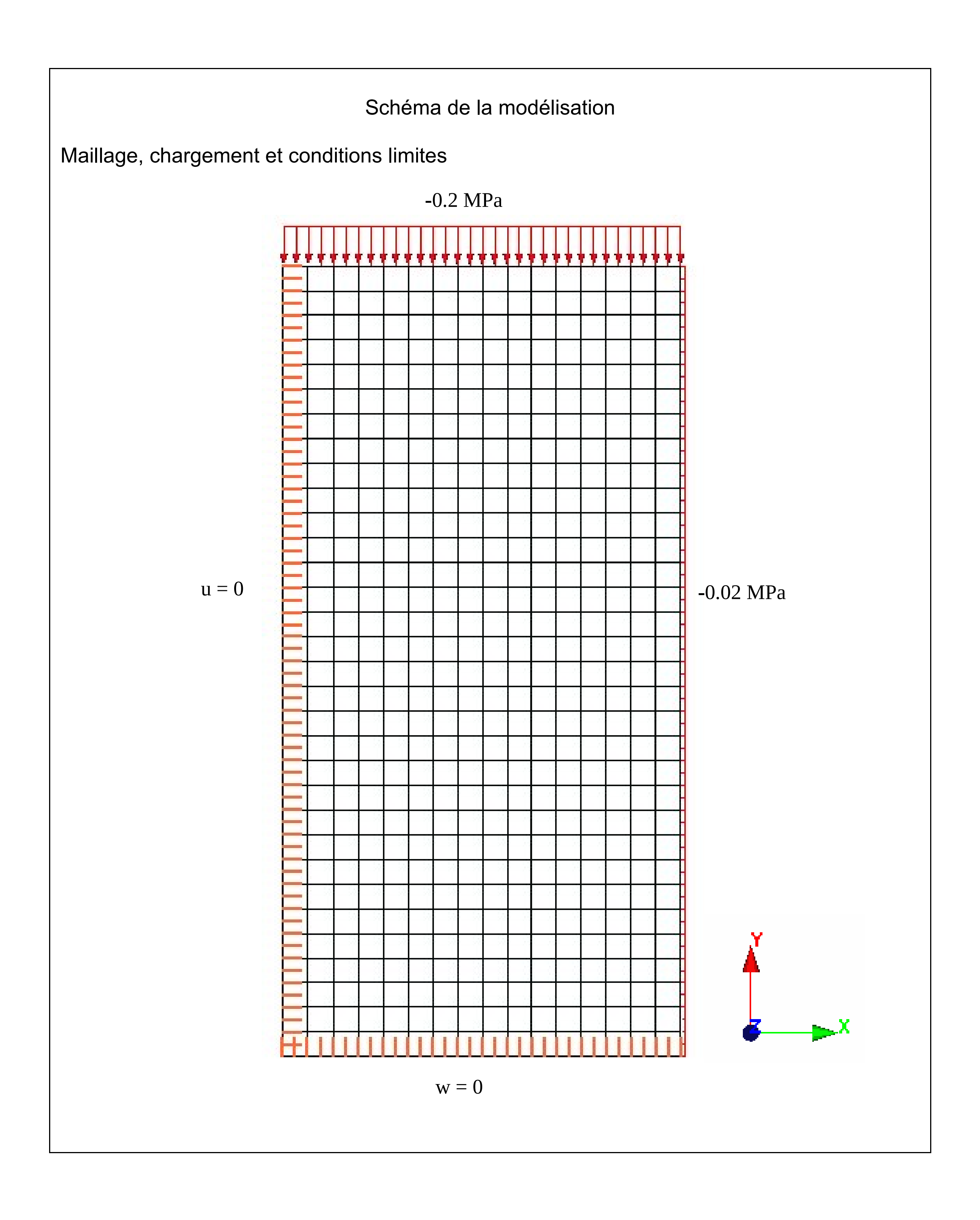
Chargement :

Pression verticale uniformément répartie au sommet de l'échantillon (0,2 MPa)
Pression horizontale uniforme sur le pourtour de l'échantillon (0,02 MPa)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.

Le maillage ne représente que la moitié supérieure de l'éprouvette, sachant qu'il y a symétrie avec la partie inférieure.


Schéma de la modélisation
Maillage, chargement et conditions limites
-0.2 MPa
u = 0
-0.02 MPa
w = 0
Y
X
Z

Jeux de données correspondant (tcr1_ccp2.data):

```
EXEC
COMT
----------
triaxial a confinement constant (modele K-theta)
----------

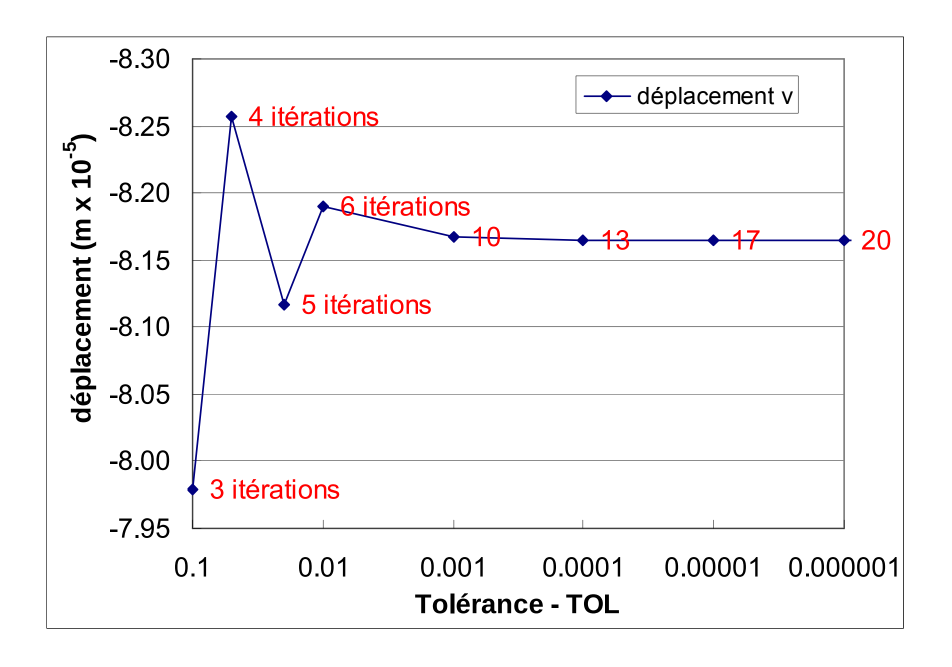
COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83 2  0.02000  600  0.35  416.7  0.35  0.1  0  0.4  1000
COND
  0
NUL
 2
  65
     1     3     7     9    19    21    37    39    61    63
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 1 0 0
 0
NUL
 2
  33
     1     2     4     5    13    14    28    29    49    50
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 1 0
 0
CHAR
  2
PUR       1
  16   3
  1555  1560  1553     1560  1565  1558
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
       0.200000
PUR
   32    3
  680  685  678  685  690  683  690  695  688  695  700  693
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
     -0.02
CVCR
 1
 0
 10000 .0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

Soit:	**Calcul analytique**		**Résultats CVCR**
$E° =$	416.7	MPa	
$N =$	0.4		
$p_a =$	0.1	MPa	
Demi-hauteur $= h =$	0.160	m	
Rayon $= r =$	0.080	m	
$\sigma_1 =$	-0.02	MPa	-0.02
$\sigma_2 =$	-0.02	MPa	-0.02
$\sigma_3 =$	-0.2	MPa	-0.2
$\upsilon =$	0.35		
Alors:			
$p = -(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3 =$	0.08		
$E = E° \cdot (p/pa)^{(1-N)} =$	364.48318		
$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)\right] =$	0.000156386		0.000156386
$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)\right] =$	-0.000510312		-0.000510312
$u = \varepsilon_1 \cdot r =$	1.25109E-5		1.25109E-5
$v = \varepsilon_3 \cdot h =$	-8.16499E-5		-8.16499E-5

Résultats :

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les résultats issus de CESAR-CVCR sont reportés dans la dernière colonne du tableau ci-haut. Ils sont identiques à la solution analytique. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir un seul élément. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon. La figure suivante montre l'importance d'utiliser une tolérance suffisante pour converger vers une solution adéquate.



CVCR	fwd1_a2s1

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St Laurent
Révision : 9/12/2007

Objectif du test : Validation du modèle par comparaison avec des données terrain - Simulation d'un essai FWD sur une chaussée à faible trafic, avec le modèle de Boyce, en 2D axisymétrique.

Maillage : Axisymétrique (rayon = 6 m, hauteur = 2,47 m)
Nb. noeuds : 4661 Nb. éléments : 1500 Nb. groupes : 3

Famille(s) d'éléments : MBQ8

Loi(s) de comportement :

Groupe 1 : Enrobé bitumineux - Élastique linéaire (IMOD = 1, RO=0,02350, YOUNG = 8160, POISS = 0,35), 5 cm d'épaisseur.

Groupe 2 : Grave non traitée - Élastique non linéaire selon Boyce (IMOD = 83, RO=0,02, Ka = 133, Ga = 72,3, N=0,384, Gamma = 1, Pc = 0), 42 cm d'épaisseur.

Groupe 3 : Sol - Élastique linéaire (IMOD = 1, RO=0,018, YOUNG = 40, POISS = 0,35), 2 m d'épaisseur.

Conditions aux limites :

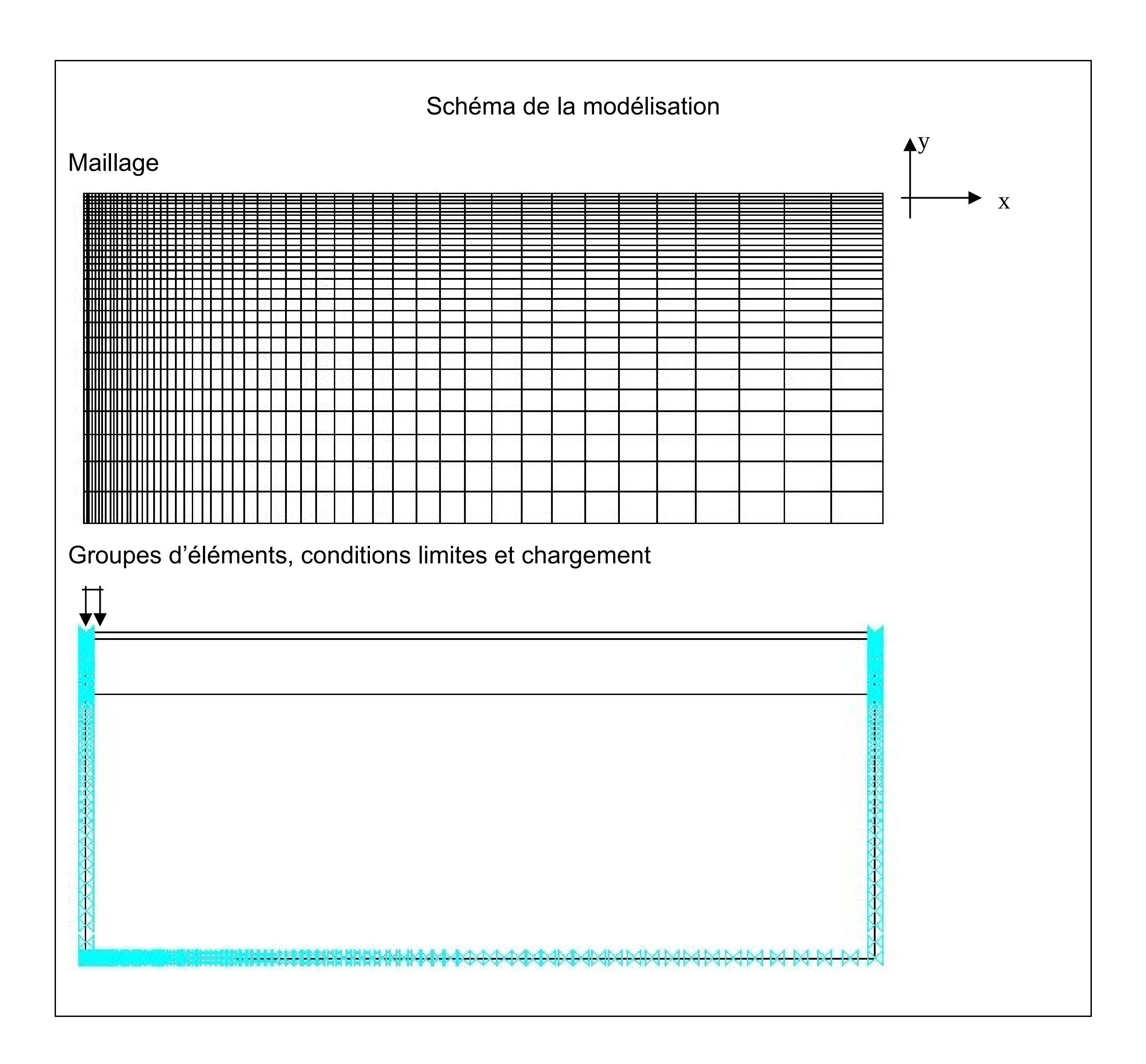
u = 0 sur les facettes verticales
v = 0 sur les facettes horizontales situées sous le maillage.

Chargement :

Pression verticale uniformément répartie de 1,004 MPa sur une aire circulaire ayant 150 mm de rayon.

Particularités :

Forces d'inertie négligées.


Schéma de la modélisation
Maillage
y
x
Groupes d'éléments, conditions limites et chargement

Jeu de données correspondant (fwd1_a2s1.data):

```
EXEC
COMT
----------
fwd1_a2s1
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
1 2  0.02350  8160  0.35
GR-2
83 2 0.02000 1000 0.35 133 72.3 0.1 0  0.384 1
GR-3
1 2  0.01800  40  0.35
COND
  0
NUL
 2
 221
…informations de maillage tronquées pour l'affichage.
  4661
 1 0 0
 0
NUL
 2
 101
…informations de maillage tronquées pour l'affichage.
  4513
 0 1 0
 0
CHAR
  2
POI
PUR       1
   6   3
  2615  2620  2613     2620  2625  2618
  2625  2630  2623     2630  2635  2628
  2635  2640  2633     2640  2645  2638
       1.004000
SIG
0  0
 3
  3
  -0.47  0.01800  0.5  0.5
  -0.05  0.02000  0.5  0.5
   0     0.02350  0.5  0.5
 0
CVCR
 1
 0
 10000 .0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

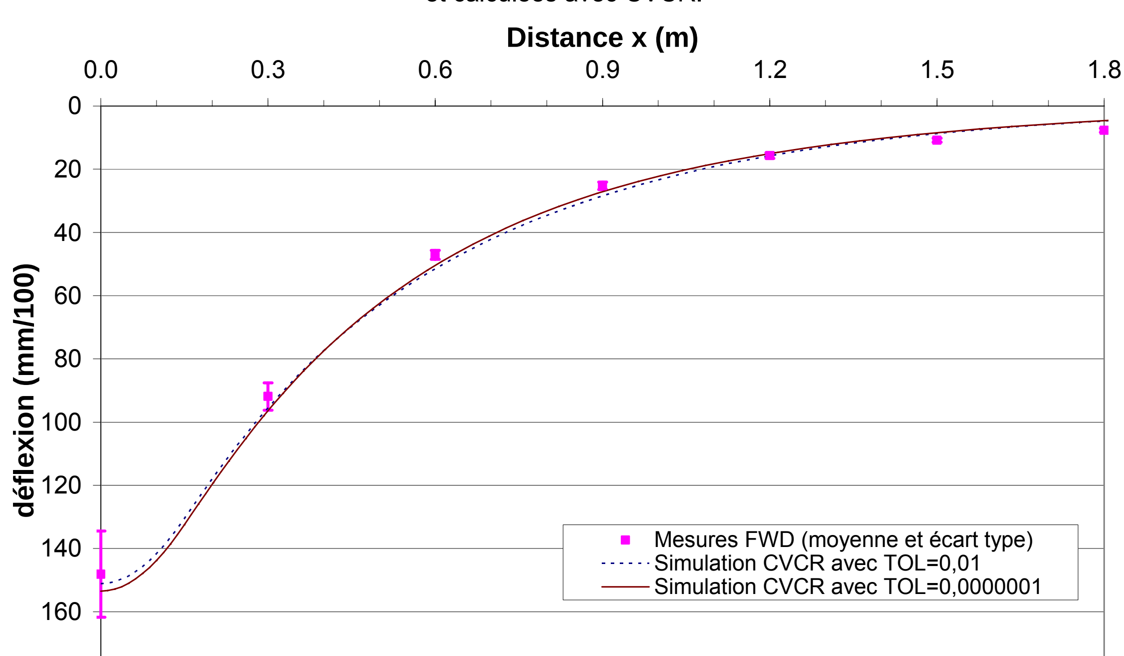
Manège de fatigue de Nantes, LCPC, expérience A2, structure 1, relevé FWD initial du 23 janvier 1990. Déflexions mesurées en surface de la chaussée en mm/100 sous la charge de 71 kN, revêtement à 8°C.

	Déflexions verticales mesurées à différentes distances du centre de la charge (en mm/100)						
Point de mesure	D_0	D_{300}	D_{600}	D_{900}	D_{1200}	D_{1500}	D_{1800}
1	160.4	91.0	44.9	23.3	14.0	9.6	6.4
2	142.2	87.7	45.8	24.1	15.3	10.5	7.8
3	142.9	86.2	47.4	26.8	16.5	11.3	7.3
4	158.9	94.0	47.8	25.8	15.3	11.6	8.1
5	145.5	89.1	47.0	25.6	15.3	10.6	8.0
6	154.6	88.3	45.5	24.1	15.6	10.6	7.2
7	114.7	94.1	49.5	26.6	16.9	11.7	8.4
8	160.0	100.7	48.2	25.4	16.9	10.9	8.3
9	154.5	92.5	46.3	25.0	15.8	10.1	8.2
10	147.3	95.1	48.3	26.5	16.1	11.0	7.6
Moyenne	**148.1**	**91.9**	**47.1**	**25.3**	**15.7**	**10.8**	**7.7**
Ecart type	**13.65**	**4.33**	**1.43**	**1.19**	**0.87**	**0.65**	**0.63**
Moy + s	**161.75**	**96.22**	**48.48**	**26.50**	**16.62**	**11.42**	**8.37**
Moy - s	**134.45**	**87.55**	**45.62**	**24.12**	**14.88**	**10.12**	**7.11**

Résultats :
Les résultats du calcul CVCR sont indiqués dans le tableau suivant pour deux valeurs de tolérance. Ces valeurs correspondent aux nœuds ayant la position x la plus proche des valeurs mesurées. La figure qui suit montre que les résultats sont proches dans l'ensemble des valeurs mesurées sur le terrain.

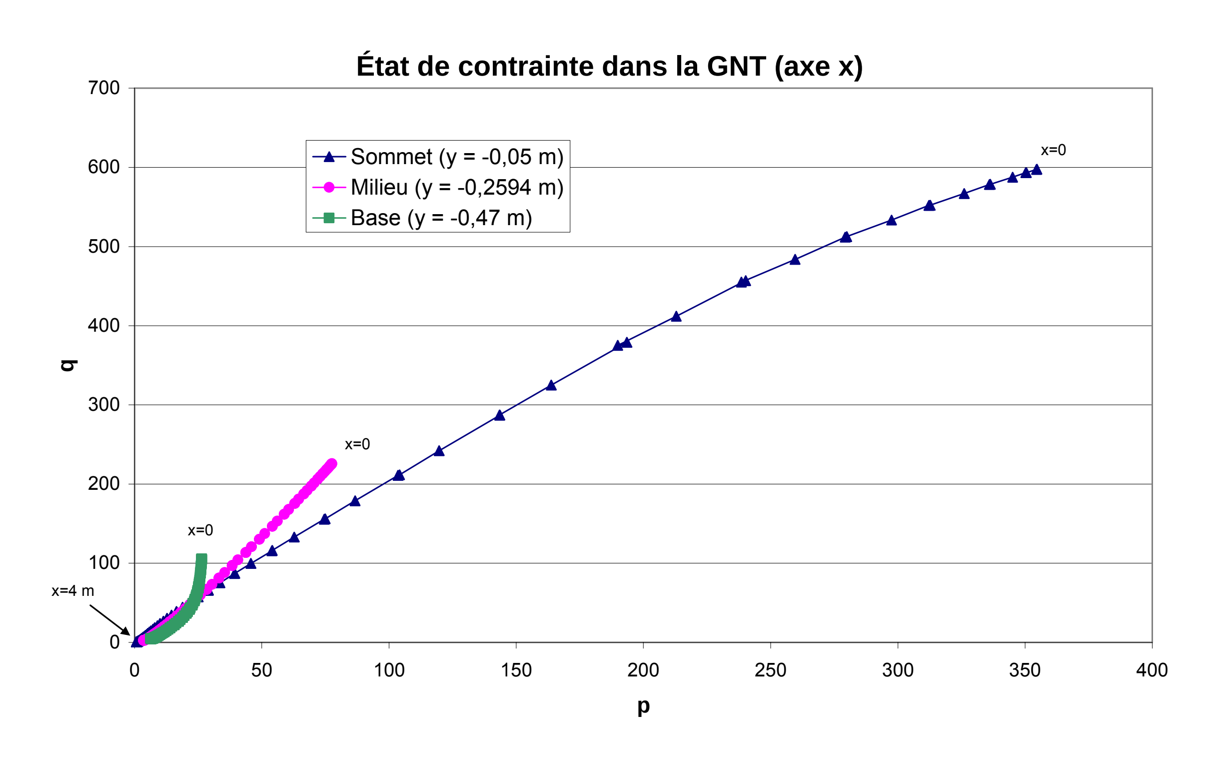
position x (m)	0	0.2925	0.6124	0.8909	1.215	1.519	1.821
TOL=0.01	151.1	97.06	50.22	28.96	15.28	8.395	4.522
TOL=1E-7	153.5	98.02	49.12	27.62	14.6	8.144	4.415

Calcul fwd1_a2s1 – Comparaison des déflexions verticales mesurées sur le manège de fatigue et calculées avec CVCR.



Résultats complémentaires (mesures terrain non disponibles) :

Calcul fwd1_a2s1 – Chemins de contraintes calculés avec CVCR, dans l'espace (p,q) suivant l'axe x, pour différentes profondeurs y dans la grave non traitée.



CVCR	Sp03_boy1

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 18/12/2007

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle de Boyce.
Cas étudié : Cube fictif de grave non traitée soumis à une sollicitation triaxiale homogène – calcul 3D

Maillage : Tridimensionnel (1 x 1 x 1 m)
Nb. noeuds : 20 Nb. éléments : 1 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MTH20

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire de Boyce (IMOD=83)

Ka = 20.1 MPa, Ga = 39 MPa, n= 0.351, gamma=0.521, Pa=0.1 MPa, Pc = 0

Conditions aux limites :

u = 0 sur l'une des faces verticales, lorsque x = 0

v = 0 sur l'une des faces verticales, lorsque y = 0

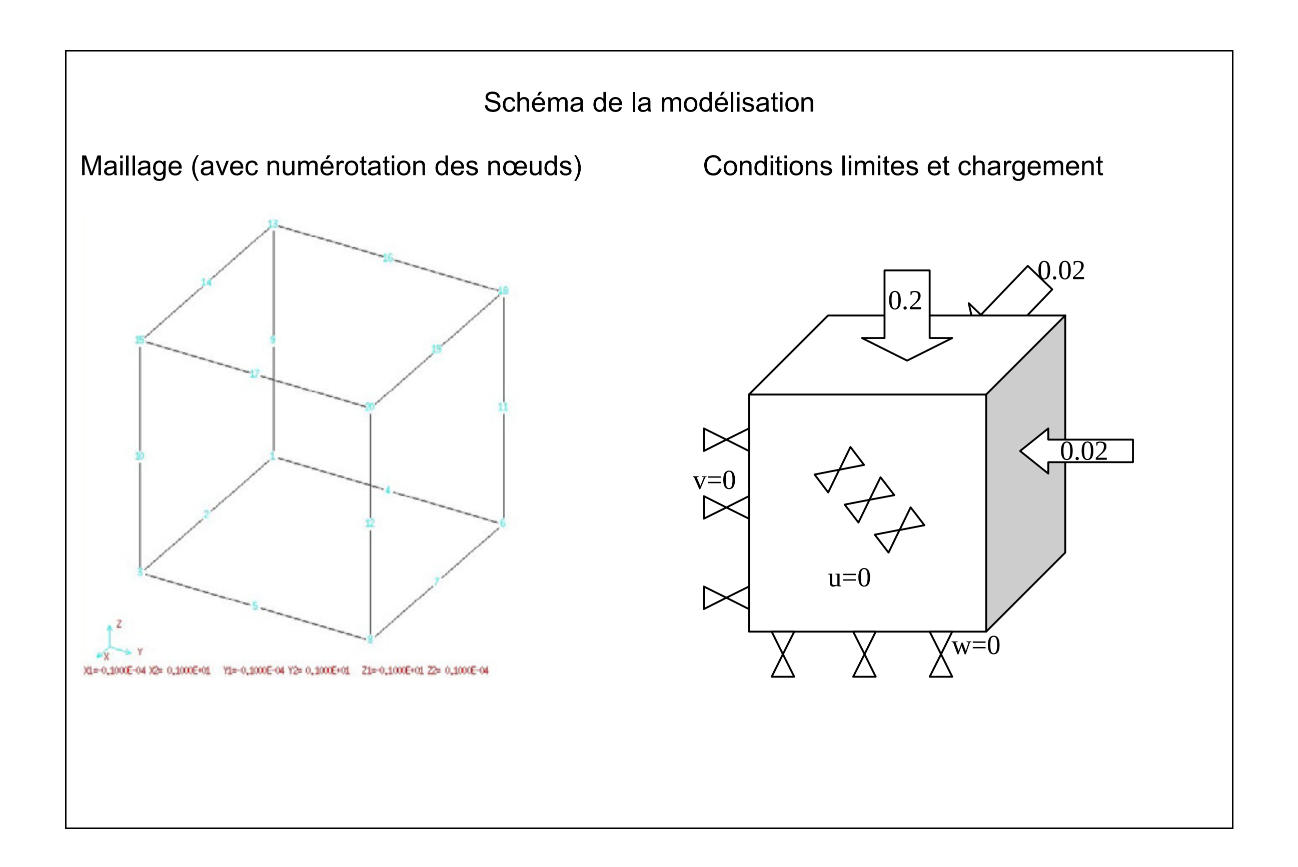
w = 0 sous le cube, soit lorsque z = -1

Chargement :

Pression verticale uniformément répartie au sommet de l'échantillon (0,20 MPa)
Pression horizontale uniforme sur le pourtour de l'échantillon (0,02 MPa)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.


Schéma de la modélisation
Maillage (avec numérotation des nœuds)
Conditions limites et chargement
0.2
0.02
0.02
v=0
u=0
w=0

Jeu de données correspondant (sp03_boy1.data):

```
EXEC
COMT
----------
cube fictif 3D verification Boyce
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83  0.02000  400  0.35  20.1  39.0  0.1  0  0.351  0.521
COND
  0
NUL
 2
   8
     3     5     8    10    12    15    17    20
 1 0 0
 0
NUL
 2
   8
     1     2     3     9    10    13    14    15
 0 1 0
 0
NUL
 2
   8
     1     2     3     4     5     6     7     8
 0 0 1
 0
CHAR
  2
PUR       1
   1   8
    13    15    20    18    14    17    19    16
   -0.2
PUR
   1   8
    1   13   18    6    9   16   11    4
   -.02
PUR
   1   8
    6   18   20    8   11   19   12    7
   -.02
CVCR
 1
 1
 1000 0.0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

Validation analytique - modèle de Boyce (sp03_boy1.data)

Soit :

	Calcul analytique	Résultats CVCR
Ka =	20.1 MPa	
Ga =	39 MPa	
n =	0.351	
gamma =	0.521	
pa =	0.1 MPa	
Longueur des arrêtes du cube = a =	1 m	
σ_1 =	-0.02 MPa	-0.01999999
σ_2 =	-0.02 MPa	-0.01999999
σ_3 =	-0.2 MPa	-0.2

Alors:

	Calcul analytique	Résultats CVCR
$p^* = -\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \gamma \cdot \sigma_3\right)/3 =$	0.04806667	
$q^* = \left\lvert \gamma \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \right\rvert =$	0.0842	
$\varepsilon_v^* = -\dfrac{1}{K_a}\dfrac{p^{*n}}{p_a{}^{n-1}}\left[1 + \dfrac{(n-1)K_a}{6G_a}\left(\dfrac{q^*}{p^*}\right)^2\right] =$	-0.00318898	
$\varepsilon_q^* = -\dfrac{1}{3G_a}\dfrac{p^{*n}}{p_a{}^{n-1}}\dfrac{q^*}{p^*} =$	-0.00115774	
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_v^* / 3 - \varepsilon_q^* / 2 =$	-0.00048413	-0,0004841
$\varepsilon_3 = \gamma \cdot \varepsilon_v^* / 3 + \gamma \cdot \varepsilon_q^* =$	-0.001157	-0.001157
$u = -a \cdot \varepsilon_1 =$	0.00048413	0.0004841
$v = a \cdot \varepsilon_2 =$	-0.00048413	-0.0004841
$w = a \cdot \varepsilon_3 =$	-0.001157	-0.001157

Nota : il est aussi possible de retrouver les modules de rigidité de la façon suivante :

$K^* = \dfrac{K_a\left(p^*/p_a\right)^{(1-n)}}{1 - \dfrac{(1-n)\,K_a}{6\,G_a}\left(\dfrac{q^*}{p^*}\right)^2} =$	15.07274
$G^* = G_a\left(p^*/p_a\right)^{(1-n)} =$	24.24272
$E_h = 9\,K^* G^* / \left(3\,K^* + G^*\right) =$	47.35
$E_v = E_h / \gamma^2 =$	174.42

Résultats :

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les résultats issus de CESAR-CVCR sont reportés dans la dernière colonne du tableau ci-haut. Ils sont très près de la solution analytique. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir subdivisé le cube en plusieurs éléments. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1, σ_2 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon.

CVCR	Sp03_boy2

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 30/01/2008

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle de Boyce. Cas étudié : Calcul 3D : Cube fictif soumis à une sollicitation homogène (Compression + cisaillement) – **Prise en compte d'une pression de cohésion.**

Maillage : Tridimensionnel (1 m x 1 m x 1 m)
Nb. noeuds : 20 Nb. éléments : 1 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MTH20

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire de Boyce (IMOD=83)

Ka = 20.1 MPa, Ga = 39 MPa, n= 0.351, gamma=0.521, pa=0.1 MPa, pc=0.015 MPa

Conditions aux limites :

u = 0 en deux coins du cube parallèles à l'axe YY

v = 0 en un coin situé sur l'axe XX

w = 0 en trois coins dans le plan XY

Chargement :

Pressions de compression sur chaque face (σ_{xx} = -0,15, σ_{yy} = -0,10 et σ_{zz} = -0,20 MPa)

Cisaillements sur chaque face (σ_{xy}=σ_{yx}=0,05, σ_{xz}=σ_{zx}=0,04, σ_{yz}=σ_{zy}=0,03 MPa)

(Voir schéma page suivante)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.

Pressions assimilées par des forces (FOS) appliquées sur chaque nœud de chaque face.

Schéma de la modélisation

Maillage (avec numérotation des nœuds) et conditions limites

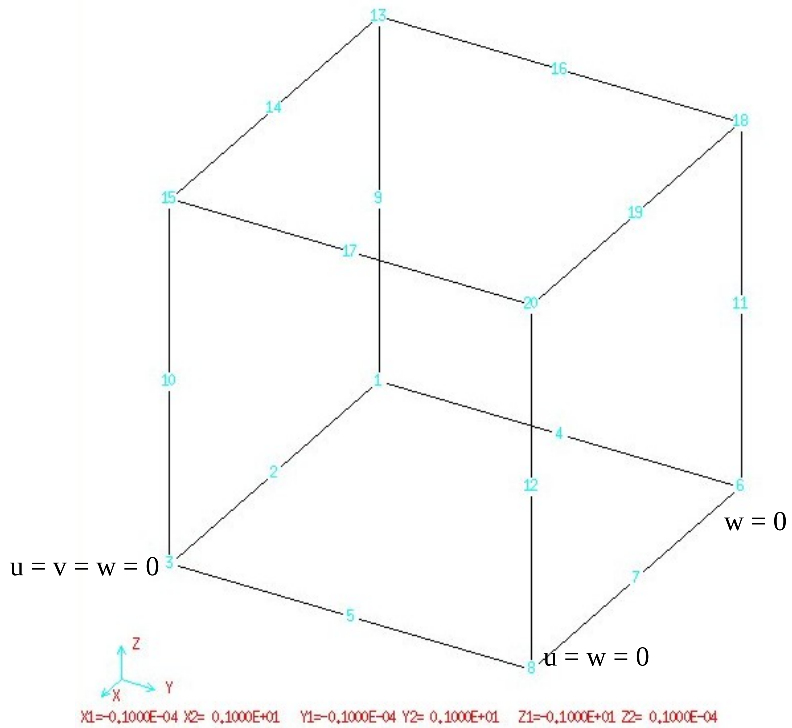
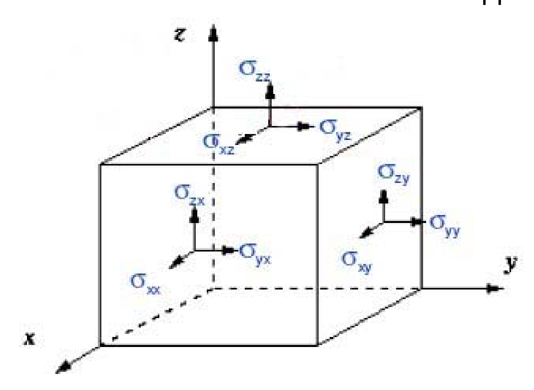


Schéma de chargement (directions positives)

(Les faces opposées sont sollicitées dans les directions opposées)



Jeux de données correspondant (sp03_boy2.data):

```
EXEC
COMT
----------
cube fictif 3D avec cisaillement vé

 rification Boyce
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83  0.02000  400  0.35  20.1  39.0  0.1  0.015  0.351  0.521
COND
  0
NUL
 2
   2
     3  8
 1 0 0
 0
NUL
 2
   1
     3
 0 1 0
 0
NUL
 2
   3
     3     6     8
 0 0 1
 0
CHAR
  2
FOS       1
   1   8
    13    15    20    18    14    17    19    16
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
   0.04  0.03  -0.2
FOS
   1   8
    1  3  8  6  2  5  7  4
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
  -0.04  -0.03  0.2
FOS
   1   8
    1   13   18    6    9   16   11    4
```

```
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
   .15  -0.05  -0.04
FOS
   1   8
    3   15  20  8   10   17   12   5
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
   -.15  0.05  0.04
FOS
   1   8
    6   18   20    8   11   19   12    7
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
   0.05  -.1   0.03
FOS
   1   8
    1  13  15  3  9 14  10  2
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
   -0.05  .1   -0.03
CVCR
 1
 1
 10000 0.000000000000001
0 0 0
```

Solution de référence analytique et comparaison avec CESAR-CVCR :

Paramètres du matériau (MPa)

Ka	Ga	n	g	pa	pc
20.1	39	0.351	0.521	0.1	0.015

Beta =(1-n)*Ka/6/Ga = 0.05574744

Tenseurs de sollicitation σ : (en MPa)

	poids propre σ_o	chargement σ_a	cond initiale i $\sigma_i = \sigma_o - I\cdot pc$	cond finale f $\sigma_f = \sigma - I\cdot pc$	$\Delta\sigma$
sxx	0	-0.15	-0.015	-0.165	-0.15
syy	0	-0.1	-0.015	-0.115	-0.1
szz	0	-0.2	-0.015	-0.215	-0.2
sxy	0	0.05	0	0.05	0.05
sxz	0	0.04	0	0.04	0.04
syz	0	0.03	0	0.03	0.03

(note: $\sigma = \sigma_o + \sigma_a$)

		cond initiale i	cond finale f
ps	=-(sxx+syy+g*szz)/3	0.012605	0.13067167
qs	=SQRT((sxx-syy)^2+(sxx-g*szz)^2+(syy-g*szz)^2+6*(sxy^2+sxz^2+syz^2))/SQRT(2)	0.007185	0.13288401
Ks	=Ka*(ps/pa)^(1-n)/(1-Beta*(qs/ps)^2)	5.338102399	25.3738326
Gs	=Ga*(ps/pa)^(1-n)	10.16990548	46.3944847
Eh	=9*Ks*Gs/(3*Ks+Gs)	18.65979236	86.4773133
Ev	=Eh/g^2	68.7434557	318.58604
Nus	=(3*Ks-2*Gs)/(6*Ks+2*Gs)	-0.082597553	-0.06802162
	=Eh/2/Gs-1	-0.082597553	-0.06802162

Condition initiale $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{C}}\ \underline{\sigma}$

exx		1/Eh i	-Nus i/Eh i	-Nus i/Ev i/g	0	0	0		sxx
eyy		-Nus i/Eh i	1/Eh i	-Nus i/Ev i/g	0	0	0		syy
ezz	=	-Nus i/Ev i/g	-Nus i/Ev i/g	1/Ev i	0	0	0	·	szz
2·exy		0	0	0	1/Gs i	0	0		sxy
2·exz		0	0	0	0	2*(1+Nus i)/Eh i	0		sxz
2·eyz		0	0	0	0	0	1/Gs i		syz

	0.053591164	0.004426499	0.002306206	0	0	0		-0.015		-0.0009
	0.004426499	0.053591164	0.002306206	0	0	0		-0.015		-0.0009
=	0.002306206	0.002306206	0.014546839	0	0	0	·	-0.015	=	-0.0003
	0	0	0	0.098329331	0	0		0		0
	0	0	0	0	0.098329331	0		0		0
	0	0	0	0	0	0.09832933		0		0

Condition finale $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{C}}\ \underline{\sigma}$

exx		0.011563727	0.000786583	0.00040981	0	0	0		-0.165		-0.0021
eyy		0.000786583	0.011563727	0.00040981	0	0	0		-0.115		-0.0015
ezz	=	0.00040981	0.00040981	0.003138869	0	0	0	·	-0.215	=	-0.0008
2·exy		0	0	0	0.021554286	0	0		0.05		0.00108
2·exz		0	0	0	0	0.021554286	0		0.04		0.00086
2·eyz		0	0	0	0	0	0.02155429		0.03		0.00065

Résultat

			ANALYTIQUE		CVCR
$\varepsilon_{final} - \varepsilon_{initial}$:	exx		-0.001181723		-0.00118172
	eyy		-0.000642866		-0.00064287
	ezz	=	-0.000502215	≈	-0.00050222
	exy		0.000538857		0.00053886
	exz		0.000431086		0.00043109
	eyz		0.000323314		0.00032331

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir subdivisé le cube en plusieurs éléments. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1, σ_2 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon.

CVCR	Sp03_tet1

Étude : **Modèle :**

Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 18/12/2007

Objectif du test : Validation analytique d'un calcul non linéaire simple avec le modèle K-theta
Cas étudié : Cube fictif de grave non traitée soumis à une sollicitation triaxiale homogène. Calcul 3D

Maillage : Tridimensionnel (1 x 1 x 1 m)
Nb. noeuds : 20 Nb. éléments : 1 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MTH20

Loi(s) de comportement :

Modèle élastique non linéaire K-theta (IMOD=83 avec code provisoire gamma=1000)

POISS = 0,35; E° = 416,7 MPa (K = 858,1 MPa); N = 0,4 (α = 0,6); Pa = 0,1 MPa ; Pc = 0.

Conditions aux limites :

u = 0 sur l'une des faces verticales, lorsque x = 0

v = 0 sur l'une des faces verticales, lorsque y = 0

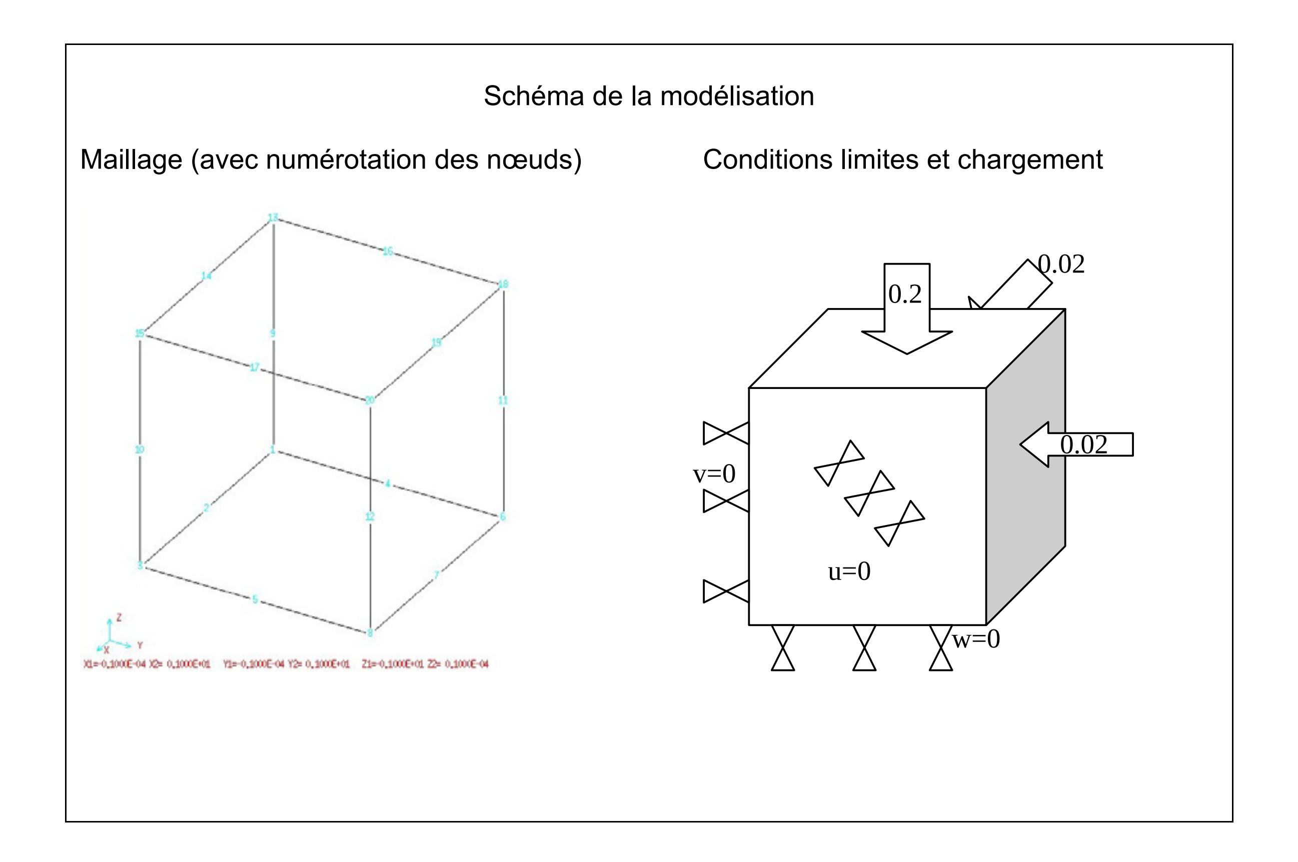
w = 0 sous le cube, soit lorsque z = -1

Chargement :

Pression verticale uniformément répartie au sommet de l'échantillon (0,20 MPa)
Pression horizontale uniforme sur le pourtour de l'échantillon (0,02 MPa)

Particularités :

Poids propre négligé en vue d'obtenir une sollicitation purement homogène.


Schéma de la modélisation
Maillage (avec numérotation des nœuds)
Conditions limites et chargement
0.2
0.02
0.02
v=0
u=0
w=0

Jeu de données correspondant (sp03_tet1.data):

```
EXEC
COMT
----------
cube fictif 3D verification k-theta
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
83  0.02000 600 0.35 416.7 0.35 0.1 0  0.4 1000
COND
  0
NUL
 2
   8
     3     5     8    10    12    15    17    20
 1 0 0
 0
NUL
 2
   8
     1     2     3     9    10    13    14    15
 0 1 0
 0
NUL
 2
   8
     1     2     3     4     5     6     7     8
 0 0 1
 0
CHAR
  2
PUR       1
   1   8
    13    15    20    18    14    17    19    16
   -0.2
PUR
   1   8
    1   13   18    6    9   16   11    4
   -.02
PUR
   1   8
    6   18   20    8   11   19   12    7
   -.02
CVCR
 1
 1
 1000 0.0000001
0 0 0
```

Solution de référence :

Soit:	**Calcul analytique**		**Résultats CVCR**
$E°$ =	416.7	MPa	↓
N =	0.4		
p_a =	0.1	MPa	
Longueur des arrêtes du cube = a =	1	m	
σ_1 =	-0.02	MPa	-0.02
σ_2 =	-0.02	MPa	-0.02
σ_3 =	-0.2	MPa	-0.2
υ =	0.35		
Alors:			
$p = -(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$ =	0.08		
$E = E° \cdot (p/pa)^{(1-N)}$ =	364.48318		
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$ =	0.000156386		0.0001564
$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$ =	-0.000510312		-0.0005103
$u = -\varepsilon_1 \cdot a$ =	-0.000156386		-0.0001564
$v = \varepsilon_1 \cdot a$ =	0.000156386		0.0001564
$w = \varepsilon_3 \cdot a$ =	-0.000510312		-0.0005103

Résultats :

Les calculs sont présentés suivant la convention de compression négative conformément au code de calcul CESAR. Les résultats issus de CESAR-CVCR sont reportés dans la dernière colonne du tableau ci-haut. Ils sont très près de la solution analytique. Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'échantillon, ce qui les rend insensibles à la finesse du maillage. On pourrait tout aussi bien avoir subdivisé le cube en plusieurs éléments. On vérifie par ailleurs que les contraintes appliquées σ_1, σ_2 et σ_3 se propagent de façon homogène partout dans l'échantillon.

CVCR	Mvigm_cal3

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 18/12/2007

Objectif du test : Massif viscoélastique, comparaison avec un calcul analytique
Calcul 3D

Maillage : Tridimensionnel : 24 x 9 x 13 éléments (20,22 x 5 x 15 m)
Nb. noeuds : 13260 Nb. éléments : 2808 Nb. groupes : 1

Famille(s) d'éléments : MTH-20

Loi(s) de comportement :

Modèle viscoélastique de Huet-Sayegh (IMOD=102)
RO=0, YOUNG=9000, POISS=0.35, E_∞=30000, E_0=0, k=0.18, h=0.2, δ=0, A_0=3.022, A_1=-0.389, A_2=0.00198.

Conditions aux limites :

u = v = 0 sur les facettes verticales

w = 0 sur les facettes horizontales situées sous le maillage

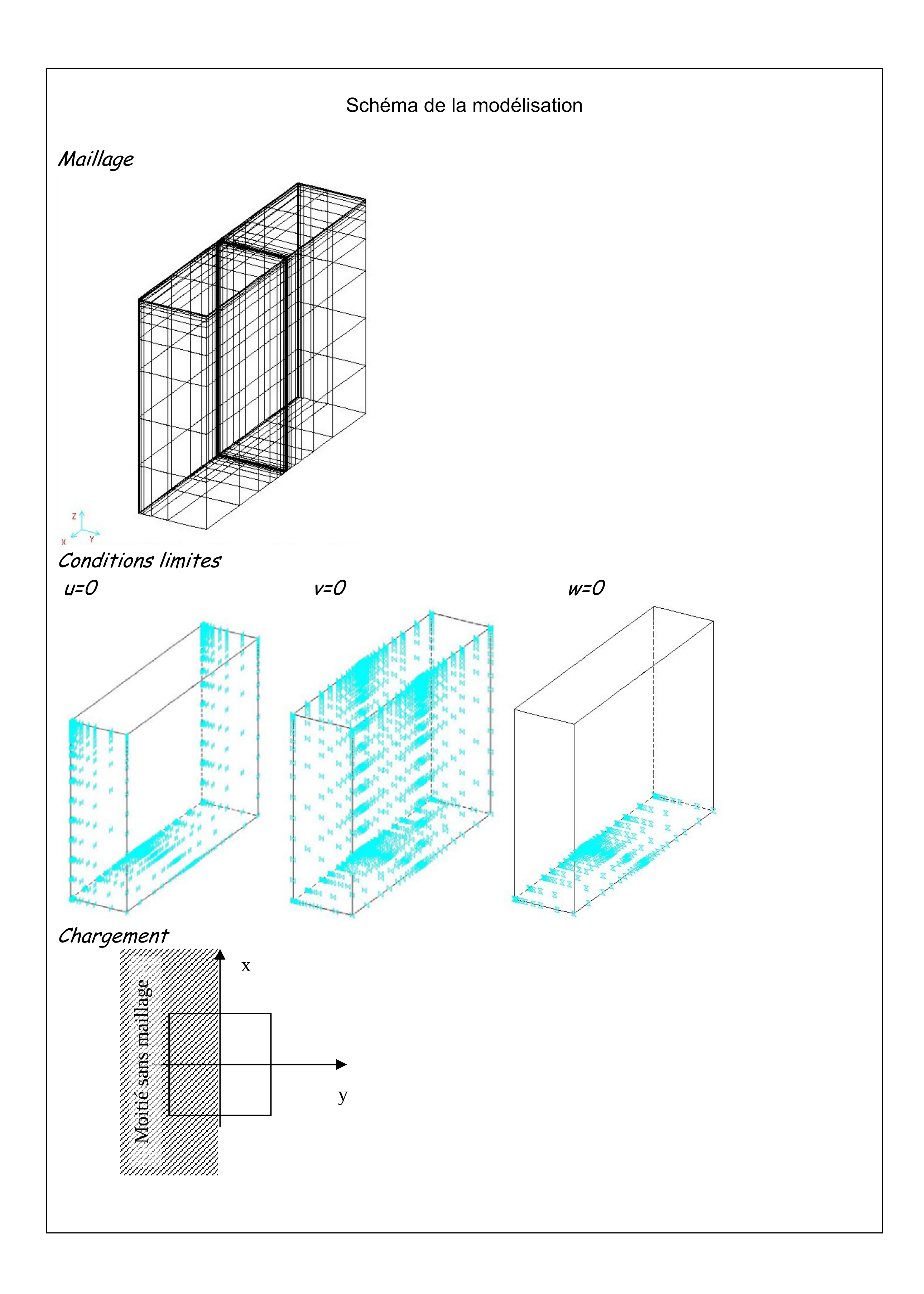
Chargement :

Pression verticale uniformément répartie de 0.662 MPa sur une empreinte carrée (0,22158 m x 0,22158 m).

Particularités :

Température de 35°C, et vitesse de 0,5 m/s.

Problème coupé suivant l'axe de symétrie en x.


Schéma de la modélisation
Maillage
Conditions limites
u=0
v=0
w=0
Chargement
x
y
Moitié sans maillage

Jeu de données correspondant (mvigm_cal3.data):

```
EXEC
COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
102    0.0  9000.  0.35
      30000.  0.  0.18  0.2  0.  3.022  -0.389  0.00198
COND
  0
NUL
 2
1469
     1     2     3     4     5     6     7     9    10    11
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 1 0 0
 0
NUL
 2
2639
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 1 0
 0
NUL
 2
 715
     1     2     3     5     6     7     9    10    11    13
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 0 1
 0
CHAR
  2
PUR       1
  32   8
  6539  6703  6710  6546  6537  6702  6544  6538
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
      -0.662000
CVCR
 24
 0.5
 100 0.001
 0 0 0
TET
 0
 35.
STOP
```

Solution de référence :

La solution de référence qui a été utilisée correspond au calcul analytique de la déflexion d'un massif viscoélastique dû au passage d'une charge circulaire roulante à vitesse uniforme . Cette solution analytique a été proposée par (Chabot et Piau, 2001) et repose sur la résolution de l'équilibre des champs de contraintes avec hypothèse de nullité des forces d'inerties et de volume. La loi de comportement viscoélastique utilisée est celle de Huet (1963), c'est-à-dire que le module E_0 de la loi de Huet-Sayegh, usuellement utilisé pour les matériaux bitumineux, est considéré nul.

Le problème est réécrit après premièrement un changement de variable sur le repère de la charge roulante et deuxièmement une double transformée de Fourier des variables d'espace du plan parallèle à la surface du massif. La formulation obtenue est quasi-identique au traitement du problème élastique linéaire, à la nature du chargement et à l'utilisation de modules complexes près. Le retour dans le domaine temporel s'effectue alors par double transformation de Fourier inverse.

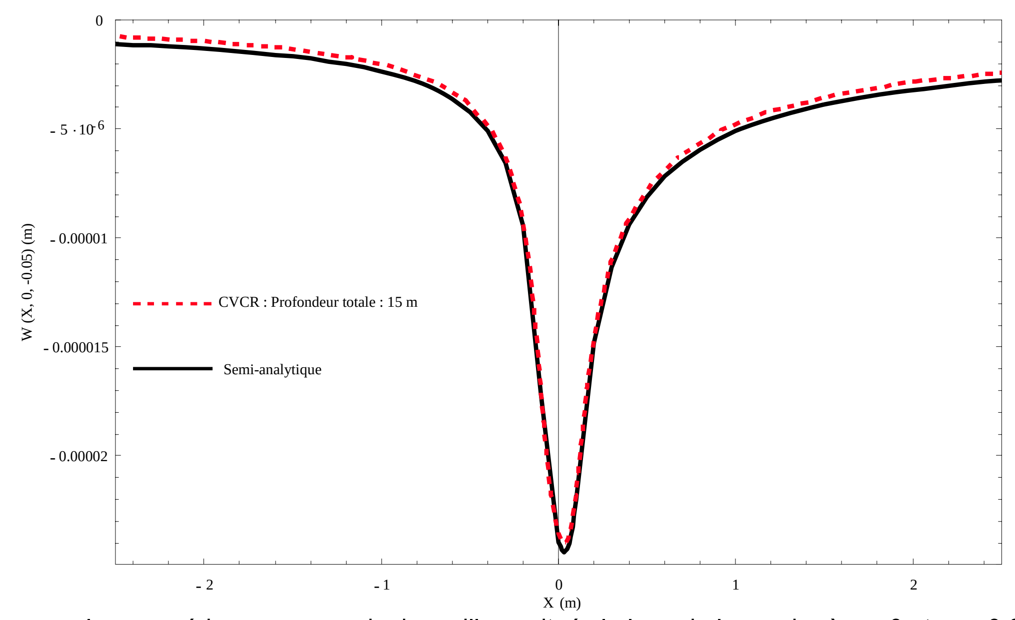
Cette double transformation inverse est elle–même effectuée quasi-analytiquement. Pour cela, les coordonnées du plan de Fourier sont transformées en coordonnées polaires. Ce nouveau changement de variable permet d'utiliser les méthodes analytiques d'intégration du plan complexe pour les intégrations concernant le rayon de ces coordonnées (décomposition des expressions en somme de 3 intégrales nulles, développement limité au voisinage de zéro, autre changement de variable). L'intégration numérique suivant l'angle de ces coordonnées est réalisée quant à elle numériquement.

Référence :

Chabot A., Piau J. M. 2001, "Calcul semi-analytique d'un massif viscoélastique soumis à une charge roulante rectangulaire"(Poster). *1ère Conférence Internationale Albert Caquot*, 3-5 Octobre, Paris, France.

Résultats :

La figure suivante illustre les bassins de déflexion issus du calcul semi-analytique et du module CVCR avec les paramètres de la présente fiche de test.



Quelques valeur numérique aux nœuds du maillage situés le long de la courbe à y = 0 et z = -0,05 :

x (m) :	-0.6722	-0.2962	-0.1109	6.43E-6	0.1109	0.2962	0.6723
w ($m \cdot 10^{-5}$) :	-0.2952	-0.6276	-1.568	-2.358	-2.077	-1.11	-0.6313

CVCR	c8s1_a

Étude : **Modèle : CVCR** Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 18/12/2007

Objectif du test : Chaussée souple soumise au manège de fatigue
Cas étudié : expérience c8 (DR) structure 1
Calcul 3D

Maillage : Tridimensionnel 20x20x20 éléments (4 x 4 x 2,812 m)
Nb. noeuds : 35721 Nb. éléments : 8000 Nb. groupes : 3

Famille(s) d'éléments : MTH20

Loi(s) de comportement :

Groupe 1 : Enrobé bitumineux - Élastique linéaire (IMOD = 1, RO=0,02400, YOUNG = 4027 MPa (27,5°C, 20 Hz, 12 m/s), POISS = 0,35), 4,2 cm d'épaisseur.
Groupe 2 : Grave non traitée - Élastique non linéaire selon Boyce (IMOD = 83, RO=0,02, Ka = 20,1, Ga = 39, N=0,351, Gamma = 0,521, Pc = 0), 22 cm d'épaisseur.
Groupe 3 : Sol - Élastique linéaire (IMOD = 1, RO=0,018, YOUNG = 85 MPa, POISS = 0,35), 2,55 m d'épaisseur.

Conditions aux limites :

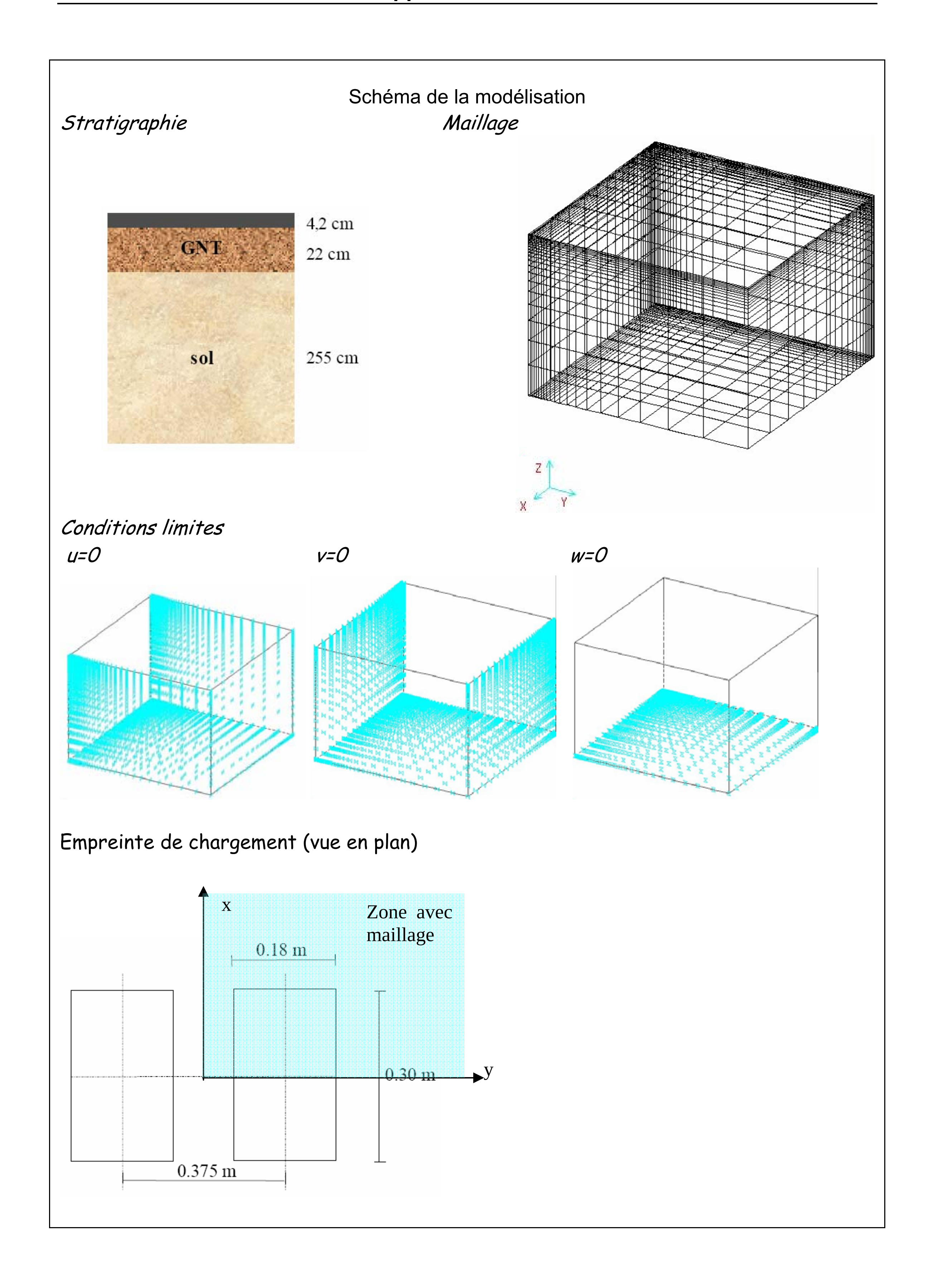
u = v = 0 sur les facettes verticales
w = 0 sur les facettes horizontales situées sous le maillage.

Chargement :

Pression verticale uniformément répartie de 0,602 MPa sur un jumelage d'empreinte rectangulaire (semelle : largeur = 18 cm, longueur = 30 cm, entraxe = 37,5 cm)

Particularités :

On considère un quart de la géométrie considérant la charge statique et la double symétrie du problème.


Schéma de la modélisation
Stratigraphie
Maillage
4,2 cm
GNT
22 cm
sol
255 cm
Z
X
Y
Conditions limites
u=0
v=0
w=0
Empreinte de chargement (vue en plan)
x
Zone avec maillage
0.18 m
0.30 m
y
0.375 m

Jeu de données correspondant (c8s1_a.data):

```
EXEC
COMT
----------
c8s1_a  GNT selon modele Boyce
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
1  0.02400 4027  0.35
GR-2
83 0.02000 1000 0.35 20.1 39 0.1 0 0.351 0.521
GR-3
1  0.01800  85  0.35
COND
  0
NUL
 2
3761
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 1 0 0
 0
NUL
 2
3761
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 1 0
 0
NUL
 2
1281
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 0 1
 0
CHAR
  2
POI
PUR       1
  16   8
 34627 34629 34691 34689 34628 34669 34690 34668
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
      -0.602000
SIG
0  0
 3
  3
  -0.262  0.01800  0.5  0.5
  -0.042  0.02000  0.5  0.5
   0      0.02400  0.5  0.5
 0
CVCR
 1
 0
 100 .001
0 0 0
```

Solution de référence et résultats :

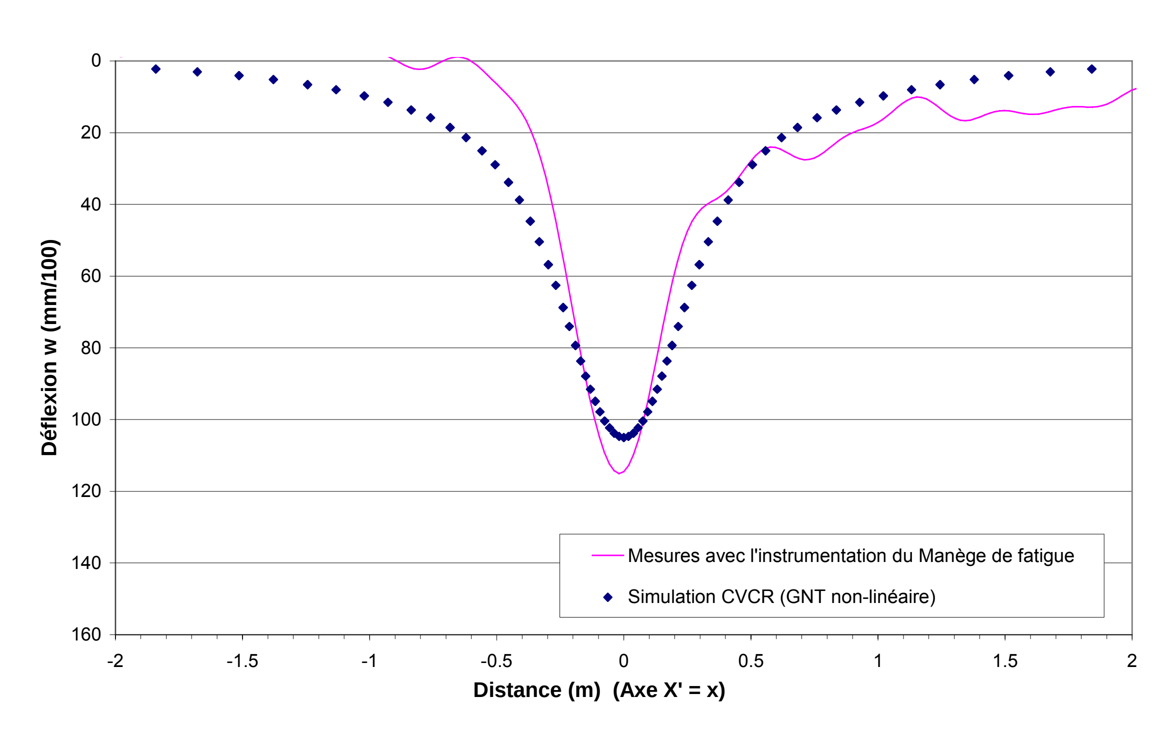
La simulation peut se comparer à des mesures de jauges obtenues sur le manège de fatigue. Le tableau qui suit fournit quelques valeurs de références mesurées et simulées tandis que les signaux complets sont illustrés sur la figure suivante.

Extraits du signal mesuré

X' (m)	-0.48	-0.384	-0.288	-0.192	-0.096	0	0.192	0.288	0.461	0.557	0.653	0.845	1.997
déflexion mesurée (mm/100)	7.9	16.6	37.9	73	104.9	114.5	61.3	42.6	31.6	24.4	26	22.2	8.2

Extraits du signal simulé

x (m)	0	0.075	0.15	0.19	0.297	0.368	0.621	1.132
-w (mm/100)	105	100.4	87.9	79.4	56.8	44.7	21.4	8



Les contraintes σ_{zz} simulées par CVCR au sommet de la couche de GNT sont les suivantes :

σ_{zz} = -0,1259 MPa à (x, y, z) = (0, 0, -0.042)

σ_{zz} = -0,4423 MPa à (x, y, z) = (0, 0.1875, -0.042)

CVCR	c8v1_b

Étude : **Modèle :** Auteur : Denis St-Laurent
Révision : 18/12/2007

Objectif du test : Chaussée souple soumise au manège de fatigue
Cas étudié : expérience c8 (DR) structure 1
Calcul 3D

Maillage : Tridimensionnel 26x18x18 éléments (8 x 4 x 2,812 m)
Nb. noeuds : 37601 Nb. éléments : 8424 Nb. groupes : 3

Famille(s) d'éléments : MTH20

Loi(s) de comportement :

Groupe 1 : Visco-élastique selon Huet-Sayegh (IMOD = 102, RO=0,02400, YOUNG FORFAITAIRE = 8000 MPa, POISS = 0,35, E_∞ = 29200 MPa, E_0 = 35 MPa, k = 0,254 MPa, h = 0,77 MPa, δ = 2,75, A_0 = 2,348, A_1 = -0,387, A_2 = 0,003), 4,2 cm d'épaisseur.

Groupe 2 : Élastique non linéaire selon Boyce (IMOD = 83, RO = 0,02, Ka = 20,1, Ga = 39, N = 0,351, Gamma = 0,521, Pc = 0), 22 cm d'épaisseur.

Groupe 3 : Élastique linéaire (IMOD = 1, RO=0,018, YOUNG = 85 MPa, POISS = 0,35), 2,55 m d'épaisseur.

Conditions aux limites :

u = v = 0 sur les facettes verticales
w = 0 sur les facettes horizontales situées sous le maillage.

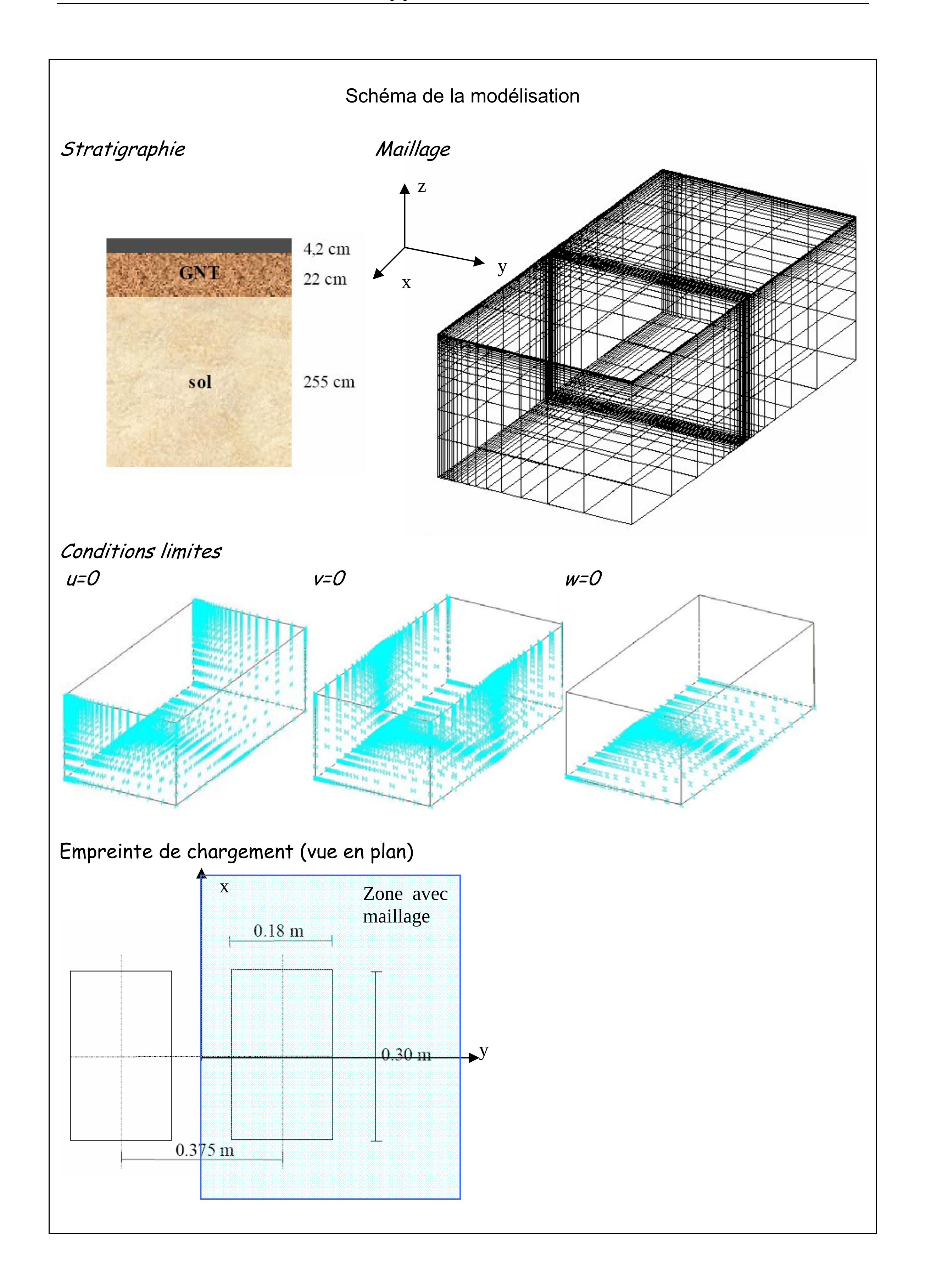
Chargement :

Pression verticale uniformément répartie de 0,602 MPa sur un jumelage d'empreinte rectangulaire (semelle : largeur = 18 cm, longueur = 30 cm, entraxe = 37,5 cm)
Vitesse de 12 m/s.

Particularités :

On considère une moitié de la géométrie considérant la symétrie du problème.

Température homogène dans la structure, donnée à 27,5°C.


Schéma de la modélisation
Stratigraphie
Maillage
4,2 cm
GNT
22 cm
sol
255 cm
z
y
x
Conditions limites
u=0
v=0
w=0
Empreinte de chargement (vue en plan)
x
Zone avec maillage
0.18 m
0.30 m
y
0.375 m

Jeu de données correspondant (c8v1_b.data):

```
EXEC
COMT
----------
c8v1 GNT selon modele Boyce et BB viscoelastique
----------

COOR
 1 1
ELEM
 1 1
GR-1
102 0.024 8000  0.35  29200  35  0.254  0.77  2.75  2.348  -0.387
0.003
GR-2
83 0.02000 1000 0.35 20.1 39 0.1 0 0.351 0.521
GR-3
1  0.01800  85  0.35
COND
  0
NUL
 2
3509
     1     2     3     4     5     6     7     9    10    11
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 1 0 0
 0
NUL
 2
4373
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 1 0
 0
NUL
 2
1493
     1     2     3     5     6     7     9    10    11    13
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
 0 0 1
 0
CHAR
  2
POI
PUR       1
  32   8
 23545 23678 23685 23552 23543 23677 23550 23544
...informations de maillage tronquées pour l'affichage
      -0.602000
SIG
0  0
 3
  3
  -0.262  0.01800  0.5  0.5
  -0.042  0.02000  0.5  0.5
   0      0.02400  0.5  0.5
 0
CVCR
 26
 12
 1000 .0001
0 0 0
```

```
TET
0
27.5
```

Solution de référence :

La simulation peut se comparer à des mesures de jauges obtenues sur le manège de fatigue. Le tableau qui suit fournit quelques valeurs de références mesurées tandis que le signal complet est illustré en parallèle avec la simulation sur la figure suivante.

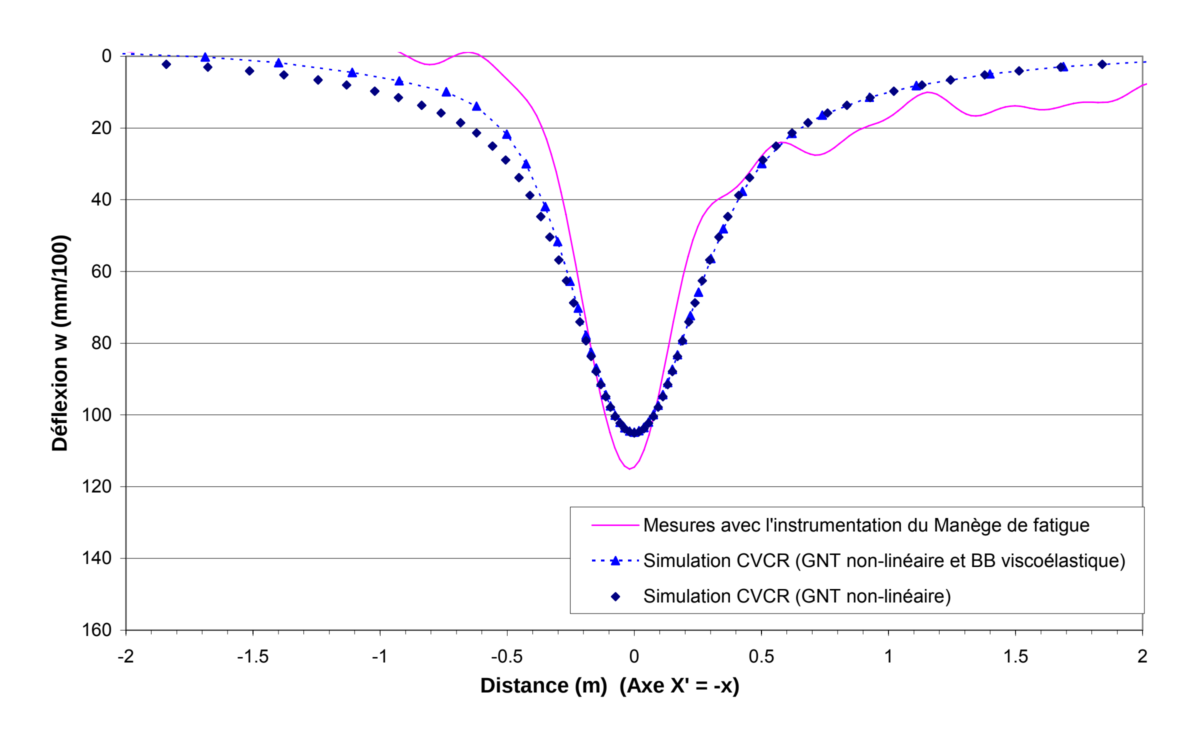
Extraits du signal mesuré

X' (m)	-0.48	-0.384	-0.288	-0.192	-0.096	0	0.192	0.288	0.461	0.557	0.653	0.845	1.997
déflexion mesurée (mm/100)	7.9	16.6	37.9	73	104.9	114.5	61.3	42.6	31.6	24.4	26	22.2	8.2

Résultats :

Extraits du signal simulé (à y=z=0)

x (m)	-0.74	-0.5	-0.35	-0.15	-0.075	0	0.075	0.15	0.35	0.5	0.74
-w (mm/100)	16.4	29.9	48.1	87.3	99.9	104.8	100.1	87	42	21.7	9.9



7. VALIDATION DE LA FONCTIONNALITÉ

Le module CVCR est considéré validé sur le plan de sa programmation en ce qui concerne l'utilisation des modèles de Huet-Sayegh, de Boyce et k-theta (se reporter aux cas de test)

Les autres modèles ont servi au développement du module, mais ont été peu utilisés depuis compte tenu de leur moindre intérêt opérationnel.

Le module a été utilisé dans le cadre de modélisations d'expérience sur chaussées instrumentées, en mettant en œuvre parfois de façon combinée le modèle de Huet-Sayegh et le modèle de Boyce. Avec de mêmes jeux de paramètres, il a permis de retrouver dans les différents cas des résultats pertinents pour différents niveaux de contrainte, différentes conditions de vitesses et de température, confirmant le caractère réaliste de la chaîne d'outils mise en place : essais de laboratoire, caractérisation des paramètres des modèles, simulation de la réponse structurelle par éléments finis.

Information issue du Manuel d'Utilisation :

Maintenance évolutive à prévoir (constat Juin 2001) : Pour le modèle k-θ, création d'un nouveau numéro pour IMOD (ou harmonisation avec l'existant) et actualisation des lignes d'impression correspondantes dans les familles 01 et 02.

7.1 Développements futurs envisagés

Des évolutions de CVCR sont envisagées concernant les points suivants :

- Couplage avec le module ORNI pour la modélisation de l'orniérage (récupération automatique des champs de contraintes sous charge roulante)
- Ajout d'un modèle élastique non linéaire adoucissant pour les sols
- Ajout d'un critère de plasticité pour limiter les états de contraintes avec le modèle de Boyce (cohérent avec les critères d'orniérage)
- Réalisation d'un pré-processeur/post-processeur adapté aux problèmes de calculs de structures de chaussées (évolution du programme LICESAR développé au LCPC par J.Balay).
- Accélération des calculs

En terme de pré et post-traitements, prévoir :

- Interfaçage complet avec CLEO (notamment dans le cas IMOD=102)
- Affichage explicite de la présence du champ de déformations dans les résultats de calcul de CVCR (traité provisoirement sous forme d'un champ de contraintes, associé à un cas de charge « virtuel » n°2)

8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Heck J.V. (2001)
Modélisation des déformations réversibles et étude des déformations permanentes des enrobés bitumineux - Application à l'orniérage des chaussées . Thèse de doctorat de l'ECN, soutenue le 30/10/01.

[2] Heck J.V., Piau J.M., Gramsammer J.C., Kerzreho J.P., Odéon H. (1998)
Thermo-visco-elastic modelling of pavement behaviour and comparison with experimental data from the LCPC test track. Proc. 5th Conference on Bearing Capacity of Roads and Airfields, Trondheim, Norvège, Juillet 1998.

[3]. Hornych P., Kazai A., Piau J.M. (1998)
Study of the resilient behaviour of unbound granular materials, proceedings 5th Conference on Bearing Capacity of Roads and Airfields, Trondheim, Norvège, Juillet 1998.

[4] Sayegh G. (1965)
Contribution à l'étude des propriétés visco-élastiques des bitumes purs et des bétons bitumineux. Thèse de docteur-ingénieur, Sorbonne, France.

[5] Huet C. (1963)
Etude par une méthode d'impédance du comportement visco-élastique des matériaux hydrocarbonés, Thèse de Docteur-Ingénieur, Faculté des Sciences de Paris.

[6] Corté J.F., Di Benedetto H. (2005)
Matériaux routiers bitumineux 1 : description et propriétés des constituants, Traité Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Hermès – Lavoisier, 2005.

[7] Boyce H.R. (1980)
A non linear model for the elastic behaviour of granular materials under repeated loading. International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea (UK), 7-11 janvier 1980.

[8] Hicks R.G., Monismith C.L. (1972)
Prediction of the resilient response of pavements containing granular layers using non-linear elastic theory, Proceedings of 3rd Int. Conference on Asphalt Pavements, vol1., pp 410-429.

[9] E. Chailleux, C. Such, G. Ramond and C. de La Roche (2006).
A mathematical-based master curve construction method applied to complex modulus of bituminous materials. Road Material and Pavement Design, 7 Special Issue, 2006.

[10] E. Chailleux (2007).
Note d'utilisation de l'application logicielle visco-analyse , logiciel disponible sur internet à www.lcpc.fr/fr/produits/viscoanalyse/index.dml, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Centre de Nantes, 1er juin 2007

ANNEXE

Extraits de la thèse de J.V.Heck

Approche pour le calcul d'une chaussée visco-élastique sous charge roulante

Traitement numérique du modèle de comportement thermo-visco-élastique de Huet-Sayegh dans le domaine temporel

2. Modèle numérique de chaussée viscoélastique sous charge roulante

2.1. Formulation du problème

Nous considérons dans la suite la section courante d'une chaussée, constituée d'une part de matériaux au comportement élastique (sol, matériaux granulaires liés ou non…) et d'autre part de matériaux bitumineux au comportement viscoélastique linéaire supposé correctement décrit par le modèle de Huet & Sayegh (loi II.30) avec des paramètres éventuellement distincts pour chacune des couches. Nous nous intéressons au calcul mécanique réversible de cette chaussée en petites déformations sous l'effet d'une charge roulante se déplaçant à vitesse constante, V, parallèlement à l'axe Ox et en sens contraire de celui-ci (axe éventuellement incliné dans le cas d'une pente).

Pour un observateur fixe lié à la route, les champs mécaniques (déplacements, déformations, contraintes…) dépendent des variables spatiales x, y, z et du temps t. Toutefois, lorsque la charge roule depuis suffisamment longtemps à vitesse constante, il s'instaure un régime pseudo-permanent pour lequel ces quantités ne dépendent plus que des variables $X = x + Vt$ (exprime la distance à la charge), y et z. On est ainsi invité à résoudre un problème mécanique stationnaire, dans le repère de la charge roulante $R' = (O', X, y, z)$, justifiable des méthodes usuelles car vérifiant les équations d'équilibre et la compatibilité cinématique. Cette méthode de résolution, évitant l'introduction de pas de temps, laisse naturellement inchangées les lois de comportement indépendantes du temps (élasticité linéaire ou non). En revanche, les lois viscoélastiques subissent une légère modification puisque la convolution temporelle (II.30) se transforme par un simple changement de variable en une convolution spatiale de la variable X. Ainsi, le système (II.30) exprimant la loi de comportement viscoélastique linéaire associée au modèle de Huet & Sayegh devient :

(IV.1) $$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}(X,y,z,\theta) = \int_{-\infty}^{X} F^I\left(\frac{X-X'}{V.\tau(\theta)}\right)\left[(1+\upsilon)\underline{\underline{\sigma}}^I - \upsilon tr\left(\underline{\underline{\sigma}}^I\right)\underline{\underline{1}}\right]_{,X}(X',y,z,\theta)dX' \\ \underline{\underline{\sigma}}(X,y,z,\theta) = \underline{\underline{\sigma}}^I(X,y,z,\theta) + 2\mu_0\underline{\underline{\varepsilon}}(X,y,z,\theta) + \lambda_0 tr(\underline{\underline{\varepsilon}}(X,y,z,\theta))\,\underline{\underline{1}} \end{cases}$$

avec les mêmes notations qu'au chapitre II. On rappelle que la température θ est considérée constante.

Ce système s'apparente à une loi de comportement linéaire non locale dans la mesure où la déformation au point (X, y, z) dépend non seulement de la contrainte en ce point mais également des contraintes en tous points (X', y, z) du demi-axe $-\infty < X' < X$, le long duquel se lit le « passé » du point X.

Le schéma de principe proposé sur la figure IV.1 illustre cette dépendance. On peut également observer sur ce schéma que les choix faits quant à la direction et au sens de passage de la charge roulante imposent le mode d'interprétation des résultats qui découleront des simulations. La lecture des champs mécaniques peut être faite de deux manières. En effet, pour un chargement surfacique placé au milieu du pavé représentant la chaussée et simulant l'empreinte de la charge roulante, la déformation (par exemple) lue en

un point situé à l'abscisse *x* de la chaussée (dans le repère fixe cette fois) est celle présente en ce point lorsque la roue, roulant dans le sens contraire à l'axe *Ox* (de la droite vers la gauche), se trouve « au milieu » de la chaussée. Réciproquement, cette lecture correspond également à la déformation « au milieu » de la chaussée lorsque la roue se trouve en *x*, roulant cette fois de la gauche vers la droite.

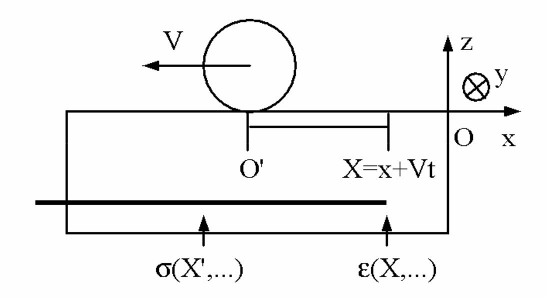


Figure IV.1 - Schéma de principe du modèle de chaussée viscoélastique sous charge roulante (la roue n'est pas simulée explicitement)

Le problème mécanique est complètement défini en associant à la loi de comportement (IV.1) entre tenseurs des contraintes et des déformations pour les enrobés bitumineux et à la loi de Hooke classique sans contraintes initiales pour les matériaux élastiques linéaires,

i) les équations d'équilibres volumiques et surfaciques, écrites en négligeant les forces d'inertie

(IV.2) $$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0}$$

(IV.3) $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = \underline{p}$ à la surface de la chaussée (empreinte de la charge),

ii) la relation de compatibilité cinématique entre déformations et déplacements

(IV.4) $$\underline{\underline{\varepsilon}}(M) = \frac{\underline{\underline{\text{grad}}}\ \text{u(M)} + {}^{t}\underline{\underline{\text{grad}}}\ \text{u(M)}}{2},$$

iii) les conditions limites sur le déplacement $\underline{u}$.

2.2. *Résolution par la méthode des éléments finis*

La structure usuelle du problème précédent vis-à-vis des équations d'équilibre permet de lui appliquer le Principe des Puissances Virtuelles ou des Travaux Virtuels (la différence n'est qu'une question de terminologie). Les équations d'équilibre (IV.2) et (IV.3) sont alors remplacées par la relation pour les petites transformations $\| \underline{\underline{grad}}\, U \| << 1$:

(IV.5) $$\forall \hat{U} \text{ champs de déplacement virtuel, } \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}}\, dXdydz = \int_S \underline{f}.\underline{\hat{U}}\, dS$$

Le travail virtuel des efforts extérieurs ne comprend qu'un chargement surfacique f car nous ne tenons pas compte dans ces développements du poids propre de la chaussée (et donc pas non plus des contraintes initiales correspondantes, la combinaison poids propre – contraintes initiales n'ayant pas d'effet sur la réponse en comportement linéaire). On ne détaille pas ici les hypothèses et le raisonnement permettant d'aboutir à la forme faible (IV.5) des travaux virtuels car il est préférable de renvoyer le lecteur vers [Salençon, 1995], ouvrage consacré à la mise en place des concepts généraux de la mécanique des milieux continus et à la méthode des puissances virtuelles fondée sur le concept de dualité énergétique. On trouvera également dans [Curnier, 1993] un exposé simple (plus approprié à l'ingénieur qu'au mathématicien) des notions d'analyse fonctionnelle utiles à la construction de la forme faible ainsi qu'une présentation des espaces de fonctions dans lesquels on doit en chercher les solutions, espaces précisant le degré de régularité et de continuité ou d'intégrabilité des dérivées de ces solutions.

Le principe des travaux virtuels se prête particulièrement bien à un traitement numérique par éléments finis. La méthode des éléments finis, amplement décrite dans [Dhatt & Touzot, 1984] et [Zienkiewicz & Taylor, 1989], repose sur un découpage du volume V d'une structure donnée en éléments de formes simples sur chacun desquels les déplacements (réels ou virtuels) sont supposés avoir une régularité suffisante pour être identifiés par interpolation de valeurs discrètes des déplacements en certains points « bien choisis » que l'on appelle les nœuds des éléments.

Dans notre cas, la chaussée est découpée en éléments isoparamétriques parallélépipèdes rectangles sur lesquels on considère que les coordonnées et les déplacements sont des fonctions quadratiques des valeurs des coordonnées et des déplacements aux sommets et aux milieux des arêtes des éléments (20 nœuds).

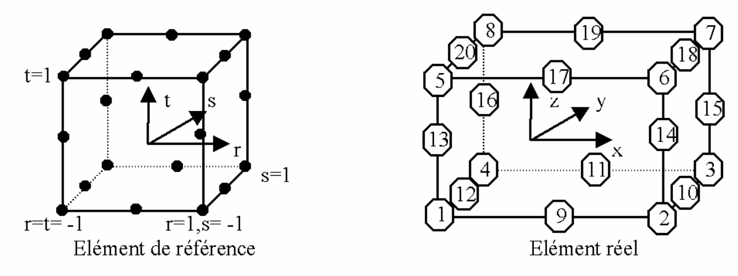


Figure IV.2 - Elément quadratique isoparamétrique tridimensionnel à 20 nœuds

Les coordonnées x, y, z et déplacements u, v, w en un point courant de l'élément réel sont alors décrits en fonction de ces mêmes quantités aux nœuds (indicées α) selon :

$$\text{(IV.6)} \qquad \begin{Bmatrix} x(r,s,t) \\ y(r,s,t) \\ z(r,s,t) \\ u(r,s,t) \\ v(r,s,t) \\ w(r,s,t) \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha=1,20} N_\alpha(r,s,t) \begin{Bmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \\ u_\alpha \\ v_\alpha \\ w_\alpha \end{Bmatrix}$$

où l'indice α désigne chacun des 20 nœuds de l'élément et les fonctions d'interpolation (ou de forme selon les auteurs) $N_\alpha(r,s,t)$ sont des fonctions triquadratiques des coordonnées curvilignes *r*, *s* et *t* prenant la valeur 1 au nœud α et 0 sur tous les autres nœuds. De manière classique, les coordonnées curvilignes sont considérées variant entre les valeurs –1 et +1. Ce choix conditionne l'expression des fonctions d'interpolation et fait que leur domaine de définition est un cube de côté bi-unitaire appelé élément de référence.

L'exploitation du principe des travaux virtuels (IV.5) sous forme matricielle nécessite de définir quelques écritures. On note $\langle U_\alpha \rangle = \langle u_1, v_1, w_1, \ldots u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha, \ldots u_{20}, v_{20}, w_{20} \rangle$, $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx} \rangle$ *et* $\langle \gamma \rangle = \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx} \rangle$ les matrices lignes des déplacements nodaux, des contraintes de Cauchy et des déformations respectivement. Cette écriture des contraintes et des déformations est rendue possible par la symétrie des tenseurs correspondants (les composantes de cisaillement des déformations sont doublées pour conserver la forme du produit contracté sur deux indices donnant l'expression du travail virtuel intérieur). L'expression des déformations étant liée à celle des déplacements par l'opérateur gradient (cf IV.4), on a également besoin des matrices lignes suivantes pour $i = x, y, z$, $\langle N_{u,i} \rangle = \langle N_{1,i}, 0, 0, \ldots N_{\alpha,i}, 0, 0, \ldots N_{20,i}, 0, 0 \rangle$, $\langle N_{v,i} \rangle = \langle 0, N_{1,i}, 0, \ldots 0, N_{\alpha,i}, 0, \ldots 0, N_{20,i}, 0 \rangle$ et $\langle N_{w,i} \rangle = \langle 0, 0, N_{1,i}, \ldots 0, 0, N_{\alpha,i}, \ldots 0, 0, N_{20,i} \rangle$ où $N_{\alpha,i} = \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial i}$. Par ailleurs, les matrices colonnes, transposées de ces matrices lignes, sont notées : $\{X\} = {}^t\langle X \rangle$.

Les fonctions d'interpolation étant exprimées selon les coordonnées curvilignes *r*, *s*, *t*, leurs dérivées par rapport aux coordonnées réelles seront calculées par la composition classique des dérivées partielles :

$$(\text{IV.7}) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} .. & \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial x} .. & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} .. & \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial y} .. & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} .. & \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial z} .. & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} .. & \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial r} .. & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s} .. & \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial s} .. & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial t} .. & \dfrac{\partial N_\alpha}{\partial t} .. & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial t} \end{bmatrix}$$

où la matrice [*J*] à inverser est la matrice jacobienne, matrice des dérivées partielles des coordonnées globales par rapport aux coordonnées curvilignes :

$$(\text{IV.8}) \qquad [J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Munis de ces différentes expressions et de la relation de compatibilité cinématique (IV.4), nous exprimons les déformations en fonction des déplacements nodaux par :

(IV.9)
$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{u,x} \rangle \\ \langle N_{v,y} \rangle \\ \langle N_{w,z} \rangle \\ \langle N_{u,y} \rangle + \langle N_{v,x} \rangle \\ \langle N_{v,z} \rangle + \langle N_{w,y} \rangle \\ \langle N_{w,x} \rangle + \langle N_{u,z} \rangle \end{bmatrix} \{U_\alpha\} = [B]\{U_\alpha\}$$

De la loi de comportement (IV.1) on tire l'expression matricielle des contraintes de Cauchy où la convolution est écrite symboliquement :

(IV.10)
$$\{\sigma\}_{X,y,z} = [R]_{X-X'} \otimes \{\gamma\}_{X',y,z} = [R]_{X-X'} \otimes [B']\{U'_\alpha\}$$

avec $[R]$ la matrice de relaxation viscoélastique linéaire.

Le travail virtuel interne des sollicitations est obtenu par changement de variables en fonction des coordonnées curvilignes :

(IV.11)
$$\hat{W}_i = \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}}\, dV \equiv \sum_{\text{éléments de référence}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \langle \hat{\gamma} \rangle . \{\sigma\} J\ drdsdt$$

où J est le déterminant de la matrice jacobienne ou jacobien.
Soit encore :

(IV.12)
$$\hat{W}_i = \sum_{\text{éléments de référence}} \langle \hat{U}_\alpha \rangle \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} {}^t[B][R]_{X-X'} \otimes [B'] J\ drdsdt \{U'_\alpha\}$$

De son côté le travail virtuel externe des actions prend la forme matricielle :

(IV.13)
$$\hat{W}_e = \int_S \underline{f} . \underline{\hat{U}}\, dS \equiv \sum_{\substack{\text{surfaces chargées} \\ \text{de référence}}} \langle \hat{U}_\alpha \rangle \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(p_x\{N_u\} + p_z\{N_w\}\right) J_{surface}\ drds$$
$$\equiv \langle \hat{U}_\alpha \rangle \{F_e\}$$

Cette expression simple correspond aux conventions de la figure (IV.1) et à l'hypothèse que la pression est constante par surface sur l'empreinte de la charge (hypothèse retenue ici pour une écriture simplifiée, pas dans le module développé dans CESAR). La composante *px* de la pression due à la charge est positive en côte, négative en descente, nulle en plat. *Pz* est naturellement toujours négative.

L'exploitation du principe des travaux virtuels conduirait alors à un système linéaire de matrice de rigidité viscoélastique $\left[K^{ve}\right]$ très pleine au regard des matrices de rigidité usuelles, du fait du caractère non local de la loi de comportement (IV.1) que l'on retrouve par l'opérateur de convolution dans l'expression (IV.12). Afin d'éviter la construction d'une matrice non symétrique et à très grande largeur de bande qui engendrerait des temps de calcul exorbitants, nous nous sommes tournés vers les méthodes de résolution itératives classiques pour les comportements non linéaires.

Considérons l'équation non-linéaire : $\hat{W}_i = \hat{W}_e \ \ ou \ \ r(\underline{U}) = \hat{W}_i(\underline{U}) - \hat{W}_e(\underline{U}) = 0$

La méthode classique de résolution de cette équation est la construction d'une suite permettant de remplacer à chaque itération la fonction non-linéaire *r(U)* par une approximation linéaire autour de l'itération précédente :

(IV.14) $$r(\underline{U}_{k+1}) \approx r(\underline{U}_k) + \underline{S}_k(\underline{U}_{k+1} - \underline{U}_k) = 0$$

Dans la méthode de Newton-Raphson par exemple, *Sk* représente une approximation de la dérivée $\frac{\partial r}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k)$ de la fonction *r(U)* au point *Uk* appelée coefficient de pente. *Uk* étant un vecteur, la dérivée est ici une dérivée directionnelle (dérivée de Gateau ou de Fréchet) de *r(U)* dans la direction *Uk+1-Uk.*

(IV.15) $$\underline{S}_k = \frac{\partial r}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k) = \frac{\partial \hat{W}_i}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k) - \frac{\partial \hat{W}_e}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k)$$

A chaque itération, on est donc amené à résoudre le système linéaire d'inconnue *Uk+1* :

(IV.16) $$\left(\frac{\partial \hat{W}_i}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k) - \frac{\partial \hat{W}_e}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k)\right)(\underline{U}_{k+1} - \underline{U}_k) = \hat{W}_e(\underline{U}_k) - \hat{W}_i(\underline{U}_k)$$

Dans notre cas, les forces sont constantes donc $\frac{\partial \hat{W}_e}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k) = 0$. Par ailleurs, afin de s'affranchir d'une matrice viscoélastique, nous prenons pour coefficient de pente une matrice constante élastique de module de rigidité forfaitaire (on s'écarte donc un peu des méthodes classiques en comportement non-linéaire mais le principe de résolution reste le même) et de coefficient de poisson égal à celui de l'enrobé (paramètres éventuellement distincts par couches) :

(IV.17) $$\frac{\partial \hat{W}_i}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_k) = \left\langle \hat{U}_\alpha \right\rangle \left[K^{\acute{e}lastique\ forfaitaire}\right]$$
$$\text{avec } \left[K^{ef}\right] = \sum_{\substack{\acute{e}l\acute{e}ments \\ de\ r\acute{e}f\acute{e}rence}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} {}^t[B]\left[D^{ef}\right][B]\, J\ drdsdt$$

avec $\left[D^{ef}\right]$ la matrice élastique forfaitaire liant localement les contraintes aux déformations (loi de Hooke classique).

La matrice de rigidité est calculée numériquement en utilisant le fait que l'intégrale d'un polynôme sur un domaine est égale à la somme des valeurs pondérées de ce polynôme en certains points particuliers du domaine appelés points d'intégration.

Nous utilisons l'intégration de Gauss qui avec r points de calcul assure l'intégration exacte d'un polynôme de degré $2r$-1. Utilisant des parallélépipèdes rectangles, le jacobien est constant sur chaque élément et les intégrandes de la matrice de rigidité $\left[K^{ef}\right]$ sont donc des polynômes de degré 4 (termes de $[B]$ au carré) que l'on peut intégrer exactement par 3 points de Gauss dans chaque direction r, s, t (l'exactitude serait perdue si l'on utilisait des hexaèdres quelconques très distordus car alors J viendrait élever le degré des intégrandes).

(IV.18) $$\left[K^{ef}\right]=\sum_{\text{éléments}}\ \sum_{i=1,27\ \text{points d'intégration}} {}^{t}[B_i]\left[D^{ef}\right][B_i]\,J_i\ P_i$$

Le terme $\hat{W}_i(\underline{U}_k)$ dans le second membre de l'équation (IV.16) ne nécessite plus de calculer explicitement la matrice de rigidité viscoélastique. En effet, connaissant le champ de déplacement à l'itération k, on calcule par (IV.9) le champ de déformation aux points d'intégration du maillage. Il suffit alors de calculer localement les champs de contrainte aux mêmes points par résolution numérique de l'équation (IV.1) d'une façon identique à la méthode proposée en annexe II. On suit pour cela les lignes de points d'intégration comme montré sur la figure IV.3 car du fait de l'uniformité du maillage suivant la variable X (dans le repère de la charge roulante), ces lignes représentent l'axe des temps.

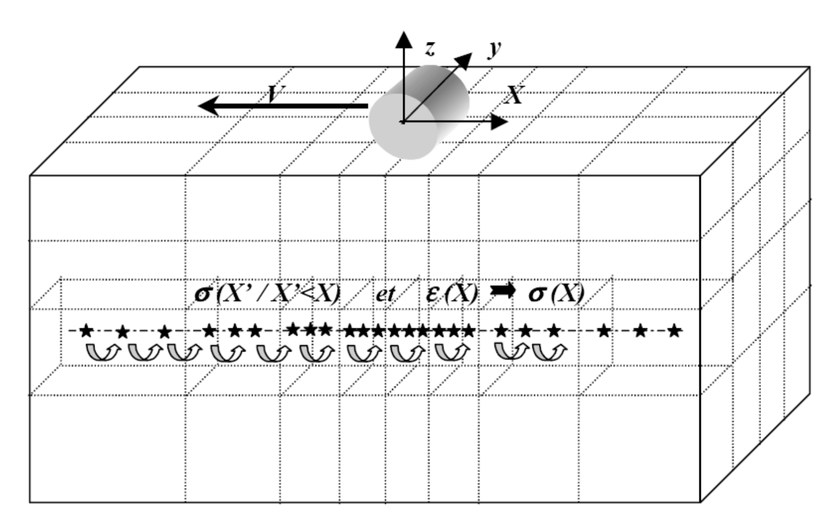


Figure IV.3 - Calcul local des contraintes suivant les lignes de points d'intégration

La création d'un maillage suffisamment étendu longitudinalement permet de négliger les contraintes sur les frontières verticales, la charge étant appliquée au centre du maillage. Cette condition permet de calculer les contraintes récursivement par lignes de points de Gauss, parallèles à l'axe des x et parcourues dans le sens des x positifs. L'initialisation d'une ligne au premier point de Gauss utilise l'hypothèse de contrainte nulle aux bornes du maillage. Le calcul du tenseur des contraintes au $p^{ième}$ point selon (IV.1) requiert la

connaissance du tenseur des déformations en ce point et celle des *p-1* tenseurs des contraintes précédemment calculés.

Les contraintes à l'itération k étant maintenant connues, on peut calculer $\hat{W}_i(\underline{U}_k)$ selon l'expression (IV.11) pour aboutir à :

$$\begin{aligned} \hat{W}_i &= \sum_{\text{éléments de référence}} \langle \hat{U}_\alpha \rangle \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} {}^t[B]\{\sigma(U_k)\} J \; drdsdt \\ &= \langle \hat{U}_\alpha \rangle \{F_i(U_k)\} \quad \left(= \langle \hat{U}_\alpha \rangle [K^{ve}]\{U_k\}\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV.19)}$$

Finalement, le système (IV.16) devant être vérifié pour tout champ de déplacements virtuels, on résout à chaque itération le système linéaire traduisant l'équilibre des forces nodales (indice α enlevé pour alléger l'écriture) :

$$[K^{ef}]\{\Delta U_{k+1}\} = \{F_e\} - \{F_i(U_k)\} \quad \text{avec} \quad \{\Delta U_{k+1}\} = \{U_{k+1}\} - \{U_k\} \qquad \text{(IV.20)}$$

Cette équation est tout à fait conforme aux systèmes linéaires classiques rencontrés en élasticité. Sa résolution peut être effectuée de manière directe en notant bien que l'opération de factorisation de la matrice $[K^{ef}]$ (factorisation de Cholevski par exemple), qui est l'étape la plus coûteuse en temps de calcul, n'est à effectuer qu'une seule fois avant les itérations. Ces développements ont donné lieu à la création d'un nouveau module dans le code CESAR-LCPC appelé « CVCR » pour « Chaussée Viscoélastique sous Charge Roulante ».

L'algorithme de CVCR est présenté sur la figure IV.4. Il n'est pas optimal sans doute – la méthode du gradient conjugué associée à un stockage morse de la matrice viscoélastique serait plus performante pour les gros systèmes – mais présente l'avantage d'être très robuste et directement applicable aux comportements non linéaires envisagés dans la suite.

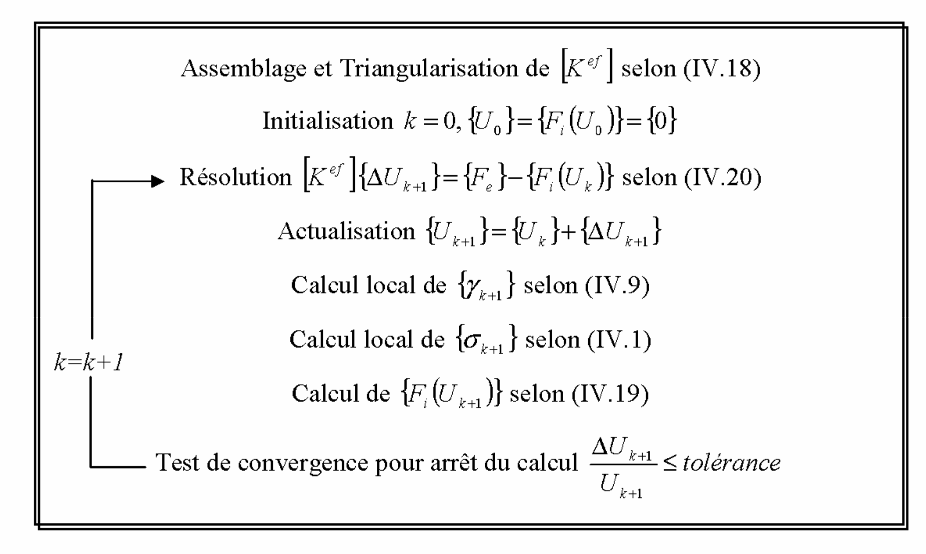


Figure IV.4 - Algorithme de résolution pour chaussées viscoélastiques – module CVCR

Annexe II Traitements numériques de la loi de comportement thermo-visco-élastique linéaire unidimensionnelle du modèle de Huet & Sayegh dans le domaine temporel

1. Hypothèses et notations

On prend pour hypothèse fondamentale de ces développements que toutes les grandeurs mécaniques et thermiques sont des fonctions continues et dérivables par morceaux sur l'espace des temps.

Soit une fonction X continue par morceau, on notera $\underline{X}$ la composante continue de X et ΔX_p les sauts de cette fonction aux instants t_p, on a donc :

(AII.1) $$X(t) = \underline{X}(t) + \sum_{p/t_p \leq t} \Delta X_p$$

La deuxième hypothèse est que tous les champs mécaniques sont nuls à l'instant *0* de début des sollicitations. Ainsi, avec $\underline{X}_{,t}$ la dérivée de $\underline{X}$ par rapport au temps, on a :

(AII.2) $$\underline{X}(t) = \int_0^t \underline{X}_{,t}(\tau)\, d\tau$$

Enfin, en troisième et dernière hypothèse on considère que les historiques ne connaissent pas de saut à l'instant *0*.

2. Equations du modèle de Huet & Sayegh à température constante ou variable

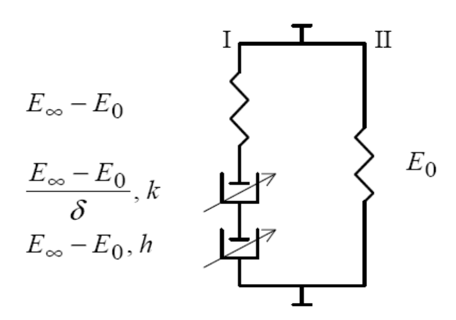


Figure 1 - Représentation analogique du modèle de Huet & Sayegh

La fonction de fluage de la branche I du modèle de Huet & Sayegh (pseudo-modèle de Huet) est :

(AII.3)
$$F(t) = \frac{1}{E_\infty - E_0}\left(1 + \delta \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{t^h}{\Gamma(h+1)}\right)$$

et le modèle est alors décrit pour une température θ fixée selon le système d'équations :

(AII.4)
$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma^I(t) + \sigma^{II}(t) \\ \varepsilon(t) = \int_0^t F\left(\frac{t-\tau}{a(\theta)}\right)\sigma^I_{,t}(\tau)\,d\tau = \frac{\sigma^{II}(t)}{E_0} \end{cases}$$

A température variable (cf chapitre III), il convient de substituer à la fonction de fluage F la fonction :

(AII.5)
$$G(t) = F\left(\int_0^t \frac{du}{a(\theta(u))}\right)$$

Le modèle est dans ce cas complètement décrit par le système d'équations suivant :

(AII.6)
$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma^I(t) + \sigma^{II}(t) \\ \varepsilon(t) = \underbrace{\varepsilon^m(t)}_{\text{déformation mécanique}} + \underbrace{\varepsilon^{th}(t)}_{\text{déformation thermique}} \\ \varepsilon^m(t) = \int_0^t G(t-\tau)\,\sigma^I_{,t}(\tau)\,d\tau = \frac{\sigma^{II}(t)}{E_0} \\ \varepsilon^{th}(t) = \int_0^t \alpha(\theta(\tau))\,\theta_{,t}(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

Où α est le coefficient de dilatation thermique qui peut être une fonction de la température.

La formule $\varepsilon^{m}(t)=\int_0^t G(t-\tau)\,\sigma^I_{,t}(\tau)\,d\tau$ [1] ainsi écrite sous forme d'intégrale de Stieltjes où les sauts de σ^I correspondent à des masses de Dirac $\Delta\sigma^I\delta$ pour la dérivée $\sigma^I_{,t}$, peut s'écrire également en considérant l'historique des contraintes comme la superposition d'échelons infinitésimaux et d'échelons finis.

On obtient ainsi d'après (AII.1) :

(AII.7) $$\varepsilon^{m}(t)=\int_0^t G(t-\tau)\,\underline{\sigma}^I_{,t}(\tau)\,d\tau+\sum_{p/t_p\le t} G(t-t_p)\,\Delta\sigma^I_p$$

La réponse instantanée du modèle étant régie par les seuls ressorts, on a par ailleurs :

(AII.8) $$\Delta\varepsilon^{m}_p=\frac{\Delta\sigma^I_p}{E_\infty-E_0}=\frac{\Delta\sigma^{II}_p}{E_0}=\frac{\Delta\sigma_p}{E_\infty}$$

3. *Réponse du modèle à une sollicitation*

Deux cas de figure se présentent :

- les historiques de déformation et de température sont imposés et l'on cherche l'historique de contrainte résultant

- les historiques de contrainte et de température sont imposés et l'on cherche l'historique de déformation résultant

Dans les deux cas, la résolution est faite selon une boucle itérative sur le temps découpé en intervalles variables tels que sur chacun d'eux on considère qu'une ou plusieurs quantités critères selon la nécessité des calculs sont constantes. On écrit alors que la valeur sur l'intervalle de cette ou ces quantités sont celles au milieu de l'intervalle (car après essais on a constaté que c'est la seule situation engendrant un schéma de résolution stable et convergent).

A chaque itération sur le temps, une instruction calcule donc le pas de temps suivant en fonction de l'écart entre les deux valeurs précédentes consécutives de la ou des quantités qui forment notre critère comparé à une valeur d'écart maximum toléré :

(AII.9) $$\frac{t_{j+1}-t_j}{t_j-t_{j-1}}=\frac{\textit{écart maximum toléré}}{\textit{quantité critère}_{j-1/2}-\textit{quantité critère}_{j-3/2}}$$

[1] Les développements sont proposés pour le cas le plus général d'une température variable. Ils restent naturellement valables dans le cas d'une température constante.

Le pas de temps suivant est donc d'autant plus grand que la variation de la quantité critère est petite.

3.1. 1er cas : $(\varepsilon(t), \theta(t)) \Rightarrow \sigma(t)$

3.1.1. Discrétisation

On découpe le temps en intervalles variables tels que sur chacun d'eux on considère que $a(\theta)$ et $\underline{\sigma}_{,t}$ sont constants (ce sont nos deux valeurs critères). Soit :

(AII.10)

$$\varepsilon^m(t_j) = \sum_{i=2}^{j} \underline{\sigma}^I_{,t}(t_{i-1/2}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j - \tau)\, d\tau + \sum_{p/t_p \le t_j} G(t_j - t_p)\,(E_\infty - E_0)\, \Delta\varepsilon^m_p \quad \text{avec } t_1 = 0$$

avec les développements :

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j - \tau)\, d\tau = \frac{1}{E_\infty - E_0} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(1 + \frac{\delta}{\Gamma(k+1)} (S(\tau))^k + \frac{1}{\Gamma(h+1)} (S(\tau))^h \right) d\tau$$

où :

$$S(\tau) = \int_{\tau}^{t_j} \frac{du}{a(\theta(u))} = \int_{\tau}^{t_i} \frac{du}{a(\theta(u))} + \sum_{n=i+1}^{j} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{du}{a(\theta(u))} = \frac{t_i - \tau}{a(\theta(t_{i-1/2}))} + \sum_{n=i+1}^{j} \frac{t_n - t_{n-1}}{a(\theta(t_{n-1/2}))}$$

On obtient ainsi :

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (S(\tau))^h\, d\tau = \frac{a(\theta(t_{i-1/2}))}{h+1} [\left(\sum_{n=i}^{j} \frac{t_n - t_{n-1}}{a(\theta(t_{n-1/2}))} \right)^{h+1} - \left(\sum_{n=i+1}^{j} \frac{t_n - t_{n-1}}{a(\theta(t_{n-1/2}))} \right)^{h+1}]$$

Et enfin :

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j - \tau)\, d\tau = \frac{1}{E_\infty - E_0} \left\{ \begin{array}{l} (t_i - t_{i-1}) + \dfrac{\delta a(\theta(t_{i-1/2}))}{\Gamma(k+2)} [\left(\sum_{n=i}^{j} r_n \right)^{k+1} - \left(\sum_{n=i+1}^{j} r_n \right)^{k+1}] \\ \\ + \dfrac{a(\theta(t_{i-1/2}))}{\Gamma(h+2)} [\left(\sum_{n=i}^{j} r_n \right)^{h+1} - \left(\sum_{n=i+1}^{j} r_n \right)^{h+1}] \end{array} \right\}$$

avec : $r_n = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{a(\theta(t_{n-1/2}))}$

De même :

$$G(t_j - t_p)(E_\infty - E_0) = 1 + \frac{\delta}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{n=p+1}^{j} r_n \right)^k + \frac{1}{\Gamma(h+1)} \left(\sum_{n=p+1}^{j} r_n \right)^h$$

Remarques : les sommations sur r_n ayant l'indice bas variable et l'indice haut toujours égal à j, on effectue ces sommations en descente pour gagner en temps de calcul.

la fonction Γ, fonction d'Euler de deuxième espèce présentée au chapitre II, est calculée selon son développement asymptotique appelé série de Stirling :

$$\forall x \in R^{+*}, \Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\; x^x \; e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \ldots\right) \quad \text{(AII.11)}$$

expression que l'on remontera de quelques rangs par la formule de récurrence de la fonction d'Euler pour diminuer l'importance du reste.

3.1.2. *Résolution*

Le problème se présente alors comme un système triangulaire où les historiques de déformation et de température imposés étant connus pour $i = 1$ à j et l'historique de contrainte cherché pour $i = 1$ à $j-1$ et considérant qu'à $t_1 = 0$ les sollicitations ne connaissent pas de saut, on obtient directement $\underline{\sigma}^I_{,t}$ à l'itération j par :

(AII.12)

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^I_{,t}(t_{2-1/2}) = \dfrac{\varepsilon^m(t_2)}{\int_0^{t_2} G(t_2-\tau)d\tau} \\ \text{et} \\ \underline{\sigma}^I_{,t}(t_{j-1/2}) = \dfrac{\varepsilon^m(t_j) - \sum\limits_{i=2}^{j-1} \underline{\sigma}^I_{,t}(t_{i-1/2}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j-\tau)d\tau - \sum\limits_{p/t_p \le t_j} G(t_j-t_p)(E_\infty - E_0)\Delta\varepsilon^m_p}{\int_{t_{j-1}}^{t_j} G(t_j-\tau)d\tau} \\ \text{pour } j \ge 3 \end{cases}$$

On obtient ensuite $\sigma^I(t_j)$ par simple intégration de $\underline{\sigma}^I_{,t}$ en y ajoutant les sauts $\Delta\sigma^I_p$:

$$\sigma^I(t_j) = \sum_{i=2}^{j} \underline{\sigma}^I_{,t}(t_{i-1/2})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{p/t_p \le t_j} (E_\infty - E_0)\Delta\varepsilon^m_p \quad \text{(AII.13)}$$

Puis, avant de passer à l'itération suivante, l'obtention de la contrainte totale se fait par sommation de la branche II sur la branche I déjà calculée :

$$\sigma(t_j) = \sigma^I(t_j) + E_0\, \varepsilon^m_p(t_j) \quad \text{(AII.14)}$$

3.2. 2ème cas : $(\sigma(t), \theta(t)) \Rightarrow \varepsilon(t)$

On décompose l'historique des contraintes et des déformations mécaniques :

(AII.15)
$$\begin{cases} \sigma(t) = \underline{\sigma}(t) + \sum\limits_{p/t_p \le t} \Delta\sigma_p \\ \varepsilon^m(t) = \underline{\varepsilon}^m(t) + \sum\limits_{p/t_p \le t} \Delta\varepsilon_p^m \end{cases}$$

et considérant selon la deuxième hypothèse qu'à $t = 0$, les champs mécaniques sont nuls :

(AII.16)
$$\varepsilon^m(t) = \int_0^t \underline{\varepsilon}_{,t}^m(\tau) d\tau + \sum_{p/t_p \le t} \Delta\varepsilon_p^m$$

L'équation (AII.7) devient :

(AII.17)

$$0 = \int_0^t \Big(G(t-\tau)\underline{\sigma}_{,t}(\tau) - \big(E_0 G(t-\tau) + 1\big)\underline{\varepsilon}_{,t}^m(\tau)\Big) d\tau + \sum_{p/t_p \le t} \big(G(t-t_p)(E_\infty - E_0) - 1\big)\frac{\Delta\sigma_p}{E_\infty}$$

3.2.1. Discrétisation

On découpe maintenant le temps en intervalles tels que sur chacun d'eux on considère que $a(\theta)$, $\underline{\varepsilon}_{,t}^m$ et $\underline{\sigma}_{,t}$ sont constants. Soit :

(AII.18)
$$0 = \sum_{i=2}^{j} \left\{ \underline{\sigma}_{,t}(t_{i-1/2}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j - \tau) d\tau - \underline{\varepsilon}_{,t}^m(t_{i-1/2})(E_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j - \tau) d\tau + (t_i - t_{i-1})) \right\}$$
$$+ \sum_{p/t_p \le t_j} (G(t_j - t_p)(E_\infty - E_0) - 1)\frac{\Delta\sigma_p}{E_\infty} \quad \text{avec } t_1 = 0$$

Les calculs relatifs à la fonction *G* ont déjà été présentés en 3.1.1.

3.2.2. Résolution

Le problème se présente alors comme un système triangulaire où les historiques de contrainte et de température imposés étant connus pour $i = 1$ à j et l'historique de déformation cherché pour $i = 1$ à $j-1$ et considérant qu'à $t_1 = 0$ les sollicitations ne connaissent pas de saut, on obtient directement $\underline{\varepsilon}_{,t}^m$ à l'itération j par :

(AII.19)

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}^{m}_{,t}(t_{2-1/2}) = \dfrac{\underline{\sigma}_{,t}(t_{2-1/2})\int_0^{t_2} G(t_2-\tau)d\tau}{E_0\int_0^{t_2} G(t_2-\tau)d\tau + t_2} \\ \text{et} \\ \underline{\varepsilon}^{m}_{,t}(t_{j-1/2}) = \dfrac{\sum_{i=2}^{j}\underline{\sigma}_{,t}(t_{i-1/2})\int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j-\tau)d\tau}{E_0\int_{t_{j-1}}^{t_j} G(t_j-\tau)d\tau + (t_j - t_{j-1})} \\ \qquad - \dfrac{\sum_{i=2}^{j-1}\underline{\varepsilon}^{m}_{,t}(t_{i-1/2})(E_0\int_{t_{i-1}}^{t_i} G(t_j-\tau)d\tau + (t_i - t_{i-1}))}{E_0\int_{t_{j-1}}^{t_j} G(t_j-\tau)d\tau + (t_j - t_{j-1})} \\ \qquad + \dfrac{\sum_{p/t_p \le t_j} (G(t_j-t_p)(E_\infty - E_0)-1)\dfrac{\Delta\sigma_p}{E_\infty}}{E_0\int_{t_{j-1}}^{t_j} G(t_j-\tau)d\tau + (t_j - t_{j-1})} \\ \text{pour } j \ge 3 \end{cases}$$

On obtient ensuite $\varepsilon^{m}(t_j)$ par :

(AII.20)
$$\varepsilon^{m}(t_j) = \sum_{i=2}^{j}\underline{\varepsilon}^{m}_{,t}(t_{i-1/2})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{p/t_p \le t_j}\frac{\Delta\sigma_p}{E_\infty} \quad \text{etc...}$$

Il ne reste plus à ce stade qu'à ajouter la déformation thermique pour obtenir la déformation totale.